LEO DE MICHELE
GIAN LUIGI FORTI

# ANALISI MATEMATICA

## PROBLEMI ED ESERCIZI

clup

# PREFAZIONE

Frutto della nostra collaborazione con il Prof. Giovanni Ricci e fortemente influenzato dalla sua sensibilità e passione didattica, usciva nel 1973 il testo "Esercizi di Analisi Matematica I".

Il favore incontrato presso studenti e colleghi dei corsi di laurea in Matematica e Fisica dell'Università di Milano, ha portato nell'arco di più di un decennio a diverse edizioni, convincendoci della sua validità didattica.

L'importanza che nel frattempo hanno assunto corsi di laurea di indirizzo informatico ha sollecitato gli autori ad una completa revisione ed ampliamento dell'opera, al fine di armonizzarla con le nuove esigenze sorte in contesti diversi dai tradizionali corsi per matematici e fisici. L'impostazione è rimasta tuttavia inalterata: alla proposta di un quesito non segue immediatamente la soluzione dello stesso, ma questa è contenuta in una parte successiva del testo, dopo un eventuale suggerimento. Riteniamo che ciò solleciti lo studente ad affrontare in modo attivo i problemi proposti.

Inoltre fin dalla prima edizione è stata intenzione degli autori presentare non solo una serie di esercizi finalizzati a rendere familiari all'allievo le tecniche di base dell'Analisi Matematica, ma anche quella di sollecitarne la curiosità presentando problemi e risultati di una certa difficoltà, che possono tuttavia essere trattati con gli strumenti relativamente semplici in suo possesso.

Lo spettro degli argomenti considerati è molto ampio e copre senz'altro il primo anno di un corso di Analisi Matematica e parte del secondo.

In ogni capitolo sono contenuti esercizi critici, opportunamente segnalati, a carattere prevalentemente teorico, che l'allievo potrà affrontare in un secondo tempo per saggiare con maggior cura la propria preparazione. Gli autori si augurano che ciò possa anche invogliare lo studente ad un ulteriore approfondimento della materia.

# INDICE

# ELENCO DEI SIMBOLI

| | |
|---|---|
| $x \in A$ | $x$ appartiene ad $A$ |
| $A \subset B$ | $A$ è contenuto in $B$ |
| $A \subseteq B$ | $A$ è contenuto in $B$ o coincide con $B$ |
| $A \cup B$ | unione: insieme degli elementi di $A$ e di $B$ |
| $A \cap B$ | intersezione: insieme degli elementi comuni ad $A$ e $B$ |
| $A - B = A \cap B^C$ | differenza |
| $A \div B$ | differenza simmetrica (I.1.5) |
| $\emptyset; A^C$ | insieme vuoto; complementare di $A$ |
| $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ | insieme costituito dagli elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ |
| $\{x : P(x)\}$ | insieme degli $x$ verificanti la proprietà $P$. |
| $\{x : P(x) \mid Q(x)\} = \{x : P(x)\} \cup \{x : Q(x)\}$ | |
| $\mathcal{P}(X)$ | insieme delle parti di $X$ |
| $A \times B$ | prodotto cartesiano (I.1.17) |
| $\chi_A$ | funzione caratteristica di $A$ (I.1.28) |
| $f : X \to Y$ | applicazione funzionale da $X$ in $Y$ |
| $f(A)$ | immagine di $A$ tramite $f$ |
| $f : x \mapsto y$ | $f(x) = y$ |
| $f^{-1}(B)$ | controimmagine di $B$ tramite $f$ (I.1.24) |
| $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ | interi maggiori o uguali a zero, interi con segno (relativi) |
| $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ | campo razionale, reale, complesso |
| $\mathbb{Q}^+ = \{x : x \in \mathbb{Q}, x \geq 0\}; \mathbb{Q}^- = \{x : x \in \mathbb{Q}, x \leq 0\}$, | |
| $\mathbb{R}^+ = \{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}; \mathbb{R}^- = \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ | |
| $[x]$ | parte intera di $x$: massimo intero minore di $x$ |
| $\operatorname{mant} x = x - [x]$ | mantissa di $x$ |
| $\lvert x\rvert$ | valore assoluto di $x$ |
| $\operatorname{sgn} x$ | signum $x$ : 1 se $x > 0$, $-1$ se $x < 0$, 0 se $x = 0$ |
| $n! = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1; \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ | |
| $\log_a x$ | logaritmo in base $a$ di $x$ |
| $\ln x$ | logaritmo naturale (in base $e$) di $x$ |
| $[a,b], (a,b], [a,b), (a,b)$ | intervallo chiuso, semiaperto inferiormente, semiaperto superiormente, aperto |
| $\sup, \inf, \max, \min$ | estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo |
| $d \mid n$ | $d$ è divisore di $n$ |
| $a \equiv b (\operatorname{mod} c)$ | $a$ congruo a $b$ modulo $c$: $a - b = kc$ con $k \in \mathbb{Z}$ |
| $z = x + iy, \overline{z} = x - iy, Re z = x, Im z = y, \lvert z\rvert = (x^2 + y^2)^{1/2}$ | |
| $\arg z$ | argomento di $z$ |
| $\exp z$ | esponenziale di $z$ |
| $\log z$ | logaritmo nel campo complesso |
| $\sin z, \cos z, \operatorname{Sh} z, \operatorname{Ch} z$ | II.2.7 |
| $\sim, o(\cdot), O(\cdot), \asymp$ | simbolo di relazione asintotica, o–piccolo, o–grande, simbolo di uguale ordine di grandezza (III.1.15) |
| $\limsup, \liminf$ | massimo e minimo limite |
| $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ | spazi delle n–ple di numeri reali e complessi |
| $\lVert x\rVert$ | norma di $\underline{x}$ |
| $(x \mid y)$ | prodotto interno di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ |
| $\overline{A}$ | chiusura di $A$ |
| $D^n f, \dfrac{d^n f}{dx^n}, f^{(n)}$ | derivata $n$–esima di $f$ |
| $\mathcal{C}^k((a,b)), \mathcal{C}([a,b])$ | spazio delle funzioni continue su $(a,b)$ e $[a,b]$ rispettivamente |
| $\mathcal{C}^k((a,b)), \mathcal{C}^\infty((a,b))$ | spazio delle funzioni $k$ volte differenziabili con continuità su $(a,b)$ e spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili su $(a,b)$ |
| $\mathcal{C}^k([a,b]), \mathcal{C}^\infty([a,b])$ | VIII.2.13. |

# PARTE I

# Capitolo I

# PRELIMINARI

## § 1 – Insiemi. Operazioni sugli Insiemi. Applicazioni

Salvo indicazione contraria, gli insiemi di cui si tratta in questo paragrafo sono da considerarsi sottoinsiemi di uno stesso insieme ambiente.

**1.1** – Siano

$$A = \left\{ 2, 3, \{3\}, L, IV, *, 21, \sim \right\}$$

$$B = \left\{ 2, \{2\}, K, T, **, III, 20, \tilde{L}, *, IV \right\}.$$

Descrivere esplicitamente gli insiemi seguenti:

$$A \cup B,\ A \cap B, A - B, B - A, \mathcal{P}(A \cap B)$$

**1.2** – Si considerino i seguenti insiemi:

1) $\{\{2\}, 3, 4\}$
2) $\{\{2\}, 2, 3, 4\}$
3) $\{\{2\}, 2, 1, 6\} - \{\{2\}, 1, 7\}$
4) $\mathcal{P}(\{2, 3, 4\})$

a) 2 è *elemento* di quali degli insiemi precedenti?
b) 2 è ***sottoinsieme*** di quali degli insiemi precedenti?
c) $\{2\}$ è ***elemento*** di quali degli insiemi precedenti?
d) $\{2\}$ è ***sottoinsieme*** di quali degli insiemi precedenti?
e) $\{\{2\}\}$ è ***sottoinsieme*** di quali degli insiemi precedenti?

**1.3** – Siano $A, B, C$ tre insiemi. Mostrare mediante un controesempio che la seguente proposizione è falsa:

$$A \cup B = A \cup \overset{C}{\cancel{B}} \Rightarrow B = C$$

**1.4** – Verificare che

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c)$$

($B^C$ complementare di $B$).

**1.5** – Dati due insiemi $A$ e $B$, si dice *differenza simmetrica* l'insieme

$$A \div B = (A - B) \cup (B - A)$$

Dimostrare le seguenti affermazioni:

1) $A \div B = B \div A$,
2) $A \div B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$,
3) $A \div B = (A \cup B) - (A \cap B)$,
4) $(A \div B) \cap C = (A \cap C) \div (B \cap C)$.

∘ **1.6** – Dati gli insiemi $A, B, C$ dimostrare che

$$A \div (B \div C) = (A \div B) \div C = (A \div C) \div B$$

**1.7** – Dimostrare la seguente relazione fra insiemi:

$$(A \cap B) \div C \supset (A \div C) \cap (B \div C)$$

∘ **1.8** – Dati $A$ e $B$, caratterizzare gli insiemi $C$ che rendono vera la seguente uguaglianza:

$$(A \cap B) \div C = (A \div C) \cap (B \div C)$$

**1.9** – Sia $\mathcal{A}$ una collezione di insiemi tale che se $E \in \mathcal{A}$ ed $F \in \mathcal{A}$ allora $E \div F \in \mathcal{A}$ e $E \cap F \in \mathcal{A}$.
Dimostrare che $E \cup F \in \mathcal{A}$ ed $E - F \in \mathcal{A}$.

**1.10** – Sia $A_n$ il segmento in $\mathbb{R}$ di estremi $\alpha_n = 0, \beta_n = 1 + \frac{1}{n}$ inclusi.
Determinare:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

**1.11** – Sia $C$ un cerchio di raggio 1. Determinare gli insiemi intersezione ed unione di tutti i triangoli equilateri inscritti in $C$.



**1.12** – Sia $\{A_n\}, n = 1, 2, \dots$ una collezione di insiemi.
Dimostrare che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

∘ **1.13** – Sia $\{A_n\}, n = 1, 2, \dots$ una collezione di insiemi.
Siano $A^*$ l'insieme degli elementi appartenenti ad infiniti $A_n$, e $A_*$ l'insieme degli elementi appartenenti a tutti gli $A_n$, salvo al più un numero finito di essi.
Mostrare che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_* \quad \text{e} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A^*.$$

**1.14** – Sia $\{A_n\}$ $n = 1, 2, \dots$ una collezione di insiemi con $A_n = E$ per $n$ pari e $A_n = F$ per $n$ dispari.
Mostrare che $A_* = E \cap F$e$A^* = E \cup F$, ove $A_*$ e $A^*$ sono definiti in I.1.13.

**1.15** – Dati gli insiemi $A, B, C, D$ e posto
$S = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) \cup (A \cap C \cap D) \cup (B \cap C \cap D)$,
$T = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D) \cap (C \cup D)$,
dimostrare che $S = T$.

∘ **1.16** – Sono dati $n$ insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$ e $k \leq n, k \in \mathbb{N}$.
Dimostrare che che l'unione $S$ di tutte le intersezioni di $k$ insiemi scelti fra gli $A_i$ è uguale alla intersezione $T$ di tutte le unioni di $n - k + 1$ insiemi scelti fra gli $A_i$.

**1.17** – Siano $A$ e $B$ due insiemi distinti o no; si chiama *prodotto cartesiano* di $A$ per $B$ l'insieme

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Siano $A = \{\emptyset, 2, **\}, \ B = \{\beta, \emptyset\}$.
Descrivere esplicitamente gli insiemi

$$A \times B, B \times A, (A \times B) \cap (B \times A).$$

**1.18** – Dimostrare le seguenti relazioni fra insiemi:
1) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$;
2) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

**1.19 –** Se $X$ e $Y$ sono due insiemi qualsiasi, una *relazione* $\mathcal{R}$ fra $X$ e $Y$ è un sottoinsieme di $X \times Y$. Se $(x,y) \in \mathcal{R}$ si scrive anche $x\mathcal{R}y$.
Elencare tutte le relazioni fra $X = \{a,b,c\}$ e $Y = \{s\}$.

**1.20 –** Una relazione $\mathcal{R}$ su $X$ (cioè fra $X$ e $X$) si dice:

1) ***riflessiva*** se per ogni $x \in X, x\mathcal{R}x$;
2) ***simmetrica*** se da $x\mathcal{R}y$ segue $y\mathcal{R}x$;
3) ***antisimmetrica*** se da $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ segue $x = y$;
4) ***transitiva*** se da $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ segue $x\mathcal{R}z$.

Sia $X = \{a,b\}$; elencare tutte le relazioni su $X$ che sono:

a) riflessive;
b) simmetriche
c) antisimmetriche
d) transitive,
e) di *equivalenza*, cioè riflessive, simmetriche e transitive.
f) di *ordine*, cioè riflessive, antisimmetriche, transitive.

**1.21 –** Dire quali delle segunti relazioni su $\mathbb{Z}$ (interi relativi)

1) $\sim$, dove $x \sim y$ significa $y - x$ divisibile per 2;
2) $*$, dove $x * y$ significa $x - y > 4$;
3) $\#$, dove $x\#y$ significa $y - x = 3$;

sono

a) riflessive;
b) simmetriche
c) antisimmetriche
d) transitive,
e) di equivalenza,
f) di ordine,

**1.22 –** Data una applicazione $f$ da $X$ su $Y$, considerare l'estensione di $f$ da $\mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{P}(Y)$ così definita:

$$f(A) = \{y : y \in Y, y = f(x) \text{ ove } x \in A\}.$$

Mostrare che per ogni famiglia $\{A_i : i \in I\}, A_i \in \mathcal{P}(X)$, valgono le seguenti relazioni:



1) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} f(A_i) = f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$;
2) $\displaystyle f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

**1.23 –** Dimostrare che un'applicazione $f : X \to Y$ è iniettiva se per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)$ si ha $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

**1.24 –** Sia $f$ una applicazione da $X$ in $Y$, si consideri l'applicazione $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ così definita:

$$f^{-1}(B) = \{x : x \in X, f(x) \in B\}.$$

Mostrare che per ogni famiglia $\{B_i : i \in I\}, B_i \in \mathcal{P}(Y)$, valgono le seguenti relazioni:

1) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$;
2) $\displaystyle\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$;
3) $f^{-1}(B^c) = \left[f^{-1}(B)\right]^c$.

**1.25 –** Sia $f : X \to Y, B \in \mathcal{P}(Y)$, mostrare che $f(f^{-1}(B)) \subset B$, inoltre $f(f^{-1}(B)) = B$ per ogni $B \in \mathcal{P}(Y)$ se e solo se $f$ è suriettiva.

**1.26 –** Si considerino le applicazioni
$f : X \to Y$ e $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$.
Condizione necessaria e sufficiente affinché $f^{-1}$ ristretta ad $Y$ definisca una applicazione è che $f$ sia biunivoca. In questo caso $f^{-1}$ è detta *applicazione inversa* di $f$.

**1.27 –** Si considerino le applicazione $f : X \to Y, g : Y \to W$ ed $h = g \circ f : X \to W$; mostrare che:

1) se $h$ è iniettiva $f$ è iniettiva;
2) se $h$ è iniettiva ed $f$ è suriettiva allora $g$ è iniettiva.

**1.28 –** Per ogni $A \subset X$ si definisce la funzione $\mathcal{X}_A$ (*funzione caratteristica di* A) nel seguente modo:

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A \\ 0 & \text{se} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Dimostrare le seguenti relazioni:

1) $\mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(x) = \mathcal{X}_{A\cap B}(x)$;
2) $\mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) - \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_b(x) = \mathcal{X}_{A\cup B}(x)$.

**1.29 –** Dati $X$ e $Y$ si consideri un'applicazione $f : X \to \mathcal{P}(Y)$; si definisca l'applicazione $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ nel seguente modo: se $A \in \mathcal{P}(X)$ è $\varphi(A) = \bigcap_{x\in A}\{f(x)\}$.

Mostrare che:

1) se $A \supset B$ allora $\varphi(A) \subset \varphi(B)$, per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)$;
2) $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$;
3) $\varphi(A \cap B) \supset \varphi(A) \cup \varphi(B)$.

**1.30 –** Sia $\{A_i : i \in I\}$ una famiglia di insiemi, chiamiamo *prodotto* degli $A_i$ l'insieme

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{x = \{x_i\}_{i\in I}, x_i \in A_i\right\}.$$

Si considerino le applicazioni

$$f : X \to \prod_{i\in I} A_i \quad \text{e} \quad p_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i$$

ove $p_i(x) = x_i$, mostrare che

$$f(X) \subset \prod_{i\in I}(p_i \circ f)(X)$$



## § 2 – Simbolo di sommatoria, simbolo di prodotto Dimostrazione per induzione.

**2.1 –** Scrivere per disteso le seguenti somme:

$$\sum_{k=0}^{6}(-1)^k a_k; \quad \sum_{k=0}^{5}(a_k + a_{k+1}); \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k x^{2k}; \quad \sum_{i,k}^{1,\ldots,3} a_i b_k.$$

**2.2 –** Scrivere con il simbolo di sommatoria le seguenti somme:

$$\frac{2^2-1}{2} + \frac{3^3-2^2}{3^2} + \frac{4^4-3^3}{4^3} + \frac{5^5-4^4}{5^4};$$

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right) + \left(1-\frac{2^2}{3^3}\right) + \ldots + \left(1-\frac{4^4}{5^5}\right);$$

$$3 - 7 + 11 - 15 + \ldots + (-1)^n(4n+3);$$

$$C_0X^n - C_1X^{n-1} + C_2X^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}C_{n-1}X + (-1)^nC_n.$$

**2.3 –** Verificare le seguenti identità:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=n+1}^{m} \quad (n < m)$;
2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1) + \sum_{h=1}^{n}(1-h) = 2n$
3) $\displaystyle\left(\sum_i a_i + \sum_i b_i\right)\left(\sum_i a_i - \sum_i b_i\right) = \sum_{i,j}(a_i a_j - b_i b_j)$;
4) $\displaystyle\sum_{i,j,k} a_i b_j c_k = \sum_i a_i \cdot \sum_j b_j \cdot \sum_k c_k$.

**2.4 –** Scrivere per disteso la seguente somma doppia:

$$\sum_{0\le i+j\le 3} a_i b_j.$$

**2.5 –** Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (q \in \mathbb{R}, q \neq 1).$$

**2.6 –** Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**2.7 –** Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2.$$

∘ **2.8 –** Siano $u_0, u_1, \dots, u_n; v_0, v_1, \dots, v_n$ numeri reali. Posto $V_k = v_0 + v_1 + \dots + v_k$ e $V_{-1} = 0$, dimostrare

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n - u_m V_{m-1}.$$

(La precedente formula è nota come *identità di Abel o formula di sommazione per parti*).

**2.9 –** Verificare la seguente identità:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_{ik} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_{ik}.$$

**2.10 –** Verificare la seguente identità:

1) $$\prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{n} b_j = \prod_{k=1}^{n} a_k b_k$$

2) $$\prod_{i=1}^{n} \left( \prod_{j=1}^{n} b_j \right) a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i b_i^n$$

3) $$\prod_{i,j=1}^{n} a_i b_j = \prod_{i=1}^{n} a_i^n b_i^n.$$

**2.11 –** Scrivere esplicitamente i seguenti prodotti:



1) $$\prod_{s,r=1}^{n} (a_r - a_s)$$

2) $$\prod_{\substack{s,r=1 \\ s \neq r}}^{n} (a_r - a_s)$$

3) $$\prod_{1 \le r < s \le n} (a_r - a_s).$$

**2.12 –** Calcolare

$$\prod_{k=2}^{n} \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right).$$

**2.13 –** Dimostrare per induzione le uguaglianze di I.2.5, I.2.6, I.2.7 .

**2.14 –** Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

**2.15 –** Dimostrare le seguenti uguaglianze:

1) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

2) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2.$$

∘ **2.16 –** Dimostrare che

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (n \ge 1, x \in \mathbb{R}, x \neq 2kn).$$

∘ **2.17 –** Dimostrare che

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \qquad (n \ge 1, x \in \mathbb{R}, x \neq 2^n k\pi).$$

**2.18 –** Dimostrare che

$$(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n}) = \prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

## § 3 – Elementi di analisi combinatoria.

**3.1** – Calcolare il numero delle diagonali di un poligono non intrecciato di $n$ lati.

**3.2** – Sia $P_n$ un poligono convesso di $n$ lati.
Calcolare il numero $T_n$ dei triangoli aventi come vertici i vertici di $P_n$.

∘ **3.3** – Sono dati 4 punti non complanari nello spazio.
Determinare il numero $N$ dei piani equidistanti dai 4 punti.

∘∘ **3.4** – Sono dati 5 punti nello spazio, non complanari e non appartenenti ad una medesima superficie sferica.
Determinare il numero $N$ dei piani e sfere equidistanti dai 5 punti.

**3.5** – Determinare le eventuali soluzioni delle seguenti equazioni in interi:

$$1)\ \binom{n}{3} = 10\binom{n}{4}; \quad 2)\ \binom{n}{2} = 3\binom{n}{3}.$$

**3.6** – Dimostrare che se $p$ è primo, allora $\binom{p}{r}, (r < p)$, è divisibile per $p$.
Mostrare con un esempio che la proprietà non è vera se $p$ non è primo.

**3.7** – Indichiamo con $D_{n,k}$ il numero delle disposizioni semplici di $n$ oggetti della classe $k$.
Dimostrare che $D_{n,k} = D_{n,h} \cdot D_{n-h,k-h}$.

**3.8** – Si consideri il triangolo aritmetico (*triangolo di Tartaglia*).



| | |
|---|---|
| 1 | nel quale ogni elemento è la somma di due |
| 1 1 | elementi della riga precedente, quello |
| 1 2 1 | soprastante e quello soprastante obliquo |
| 1 3 3 1 | a sinistra (ogni posto vuoto è da |
| ....... | considerarsi occupato da 0) |

Dimostrare che gli elementi della $(n+1)$–esima riga sono i coefficienti binomiali $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots \binom{n}{n}$.

**3.9** – Dimostrare che

$$\binom{n}{k} = \sum_{r=k-1}^{n-1} \binom{r}{k-1}.$$

∘ **3.10** – Dimostrare che per $m, n, k$ interi $(k \geq 0)$ valgono le seguenti relazioni:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{r=0}^{n} \binom{m}{k-r}\binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{k} \binom{m}{k-1}\binom{n}{r}.$$

**3.11** – Dedurre dalla uguaglianza di I.3.10, che

$$D_{m+n,k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} D_{m,k-r} D_{n,r}.$$

**3.12** – Particolarizzando $m, n, k$ in I.3.10, dimostrare che

$$\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2.$$

**3.13** – Dimostrare che

$$\sum_{(*)} \frac{n!}{q_1! q_2! \dots q_h!} = h^n$$

(*) la somma è estesa a tutte le soluzioni in interi non negativi dell'equazione $q_1 + q_2 + \dots q_h = n$.

∘∘ **3.14** – Fissati $n, h \in \mathbb{N}$ positivi, dimostrare che il massimo dei coefficienti polinomiali

$$\frac{n!}{q_1! q_2! \dots q_h!} \quad \text{è} \quad \frac{n!}{(m!)^h (m+1)^r}$$

dove $n = hm + r$ con $0 \leq r \leq h$.

**3.15 –** Sia $A$ un insieme di $N$ elementi. Calcolare il numero dei sottoinsiemi di $A$.

**3.16 –** Trovare il numero delle soluzioni in interi non negativi delle seguenti equazioni:

1) $q_1 + 3q_2 + q_3 + q_4 = 5$

2) $q_1 - q_2 + q_3 = 1$

**3.17 –** 1) Dato il polinomio $(x^2 + 3y - 2x)^5$,
determinare il coefficiente del termine in $x^2y$.

2) $(xy - \frac{1}{y} - 2x)^7$,
determinare il coefficiente del termine in $x^7$.

3) $(\frac{x}{y} + 2 + xy + x^2)^5$.
determinare la parte non dipendente da $y$.

∘∘ **3.18 –** Indichiamo con $C_{n,k}$ il numero delle combinazioni semplici di $n$ oggetti della classe $k$.
Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n-k,n-k} = 2^{2n}.$$

## § 4 – Campo razionale e campo reale.

**4.1 –** Dare esempi di:
1) classi di numeri relativi razionali,
2) coppie di classi separate,
3) coppie di classi indefinitamente ravvicinate,
4) coppie di classi contigue (con numero razionale separatore e senza numero razionale separatore),
5) partizioni del campo razionale.



**4.2 –** Scrivere la rappresentazione decimale delle seguenti frazioni constatando in ogni caso la specie del numero decimale (finito, periodico semplice, periodico misto):

$$\frac{11}{8}, \frac{15}{33}, \frac{134}{15}, \frac{4808}{900}, \frac{8054}{2475}.$$

**4.3 –** Verificare che le seguenti coppie di classi numeriche sono contigue e determinarne il numero reale separatore:

1) $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)$;

2) $\left(\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)$;

3) $\left(\frac{4n-2}{n}, \frac{4n+1}{n}\right)$;

4) $\left(\log_{10} \frac{2n}{n+4}, \log_{10} \frac{2n+10}{n+4}\right)$; $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

**4.4 –** Mostrare che se $p$ è primo non esiste alcun razionale $x$ tale che $x^2 = p$.

**4.5 –** Dimostrare che $\log_{10} 3$ è irrazionale.

**4.6 –** Se $a$ e $b$ sono razionali, $\alpha$ e $\beta$ irrazionali, cosa si può dire di

$$a + b, a + \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha, b\alpha, ab, \alpha\beta?$$

**4.7 –** Sia $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Mostrare che

$$\frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

se $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ e $ad - bc \neq 0$.

**4.8 –** Siano $m, n \in \mathbb{N}$; se $\sqrt{m} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ mostrare che sono irrazionali i numeri:

1) $\sqrt{m} + \sqrt{n}$; 2) $\sqrt{m} + \sqrt[k]{n}$, $k \in \mathbb{N}$.

**4.9 –** Dimostrare che il numero 0.12345678910111213... è irrazionale.

**4.10** – Siano $n, m, k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, se $n < m < n^k$ allora fra due potenze consecutive di $m$ vi è almeno 1 e non più di $k$ potenze di $n$.

○ **4.11** – Dimostrare che fra i numeri positivi

$$a, 2a, \ldots, (n-1)a$$

uno almeno differisce da un intero al più per $\frac{1}{n}$.

**4.12** – Dimostrare che $\sin n$ assume valori distinti tra loro al variare di $n$ in $\mathbb{N}$.

**4.13** – Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di ciascuno degli insiemi seguenti; stabilire in ogni caso se l'estremo inferiore è minimo e se l'estremo superiore è massimo.

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\} (n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$;
2) $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots\} (n \in \mathbb{N})$;
3) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} (n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$;
4) $\left\{n, \frac{1}{n^2}\right\} (n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$;
5) $\{x \in \mathbb{R}, 0 < x < 2\}$;
6) $\{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 1 | x = 20\}$;
7) $\{x \in \mathbb{R}, 0 < x < 2 | x = 3 - \frac{1}{n}\} (n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$;
8) $\left\{\frac{m}{n}\right\} (m, n \in \mathbb{N}, m < n)$;
9) $\{xy : x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 2;\ y \in \mathbb{R}, -3 \leq y < -1\}$.

**4.14** – Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due insiemi limitati di numeri reali.
Dimostrare le seguenti proprietà:

1) $\text{Sup}(\alpha + \mathcal{U}) = \alpha + \text{Sup } \mathcal{U} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
2) $\text{Inf}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \text{Inf } \mathcal{U} + \text{Inf } \mathcal{V}$
3) $\text{Sup}(\mathcal{U} - \mathcal{V}) = \text{Sup } \mathcal{U} - \text{Inf } \mathcal{V}$
4) se $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^+ - \{0\}$,
   $\text{Inf }(\mathcal{U}\mathcal{V}) = \text{Inf } \mathcal{U} \cdot \text{Inf } \mathcal{V}$.



X○ **4.15** – L'estremo superiore $s$ di un insieme $A$ di numeri non negativi è minore di 1, ed $A$ ha la proprietà che se $x$ e $y$ stanno in $A$ e $x < y$, allora $\frac{x}{y}$ sta in $A$.
Dimostrare che $s$ appartiene ad $A$.

○ **4.16** – Un insieme $A$ si dice ***numerabile*** se esiste una applicazione biiettiva di $A$ su $\mathbb{N}$, cioè $A$ può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli interi naturali. Un insieme si dice ***al più numerabile*** se è finito o numerabile.
Dimostrare che l'unione numerabile di insiemi al più numerabili è al più numerabile.

**4.17** – Un numero reale si dice *algebrico* se esiste un polinomio $P(x) \equiv a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ a coefficienti interi non tutti nulli, di cui $r$ è uno zero, cioè $r$ è soluzione dell'equazione $P(x) = 0$.
Dimostrare che l'insieme dei numeri algebrici è numerabile.
(La nozione di numero algebrico si istituisce in maniera analoga nel campo complesso, vedi II.2.18).

○○ **4.18** – Sia $A$ un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$ avente le seguenti proprietà: per ogni coppia di elementi $x, y, \in A$ tali che $x < y$ esistono $u, v, w \in A$ tali che $u < x < v < y < w$.
Ricordando che l'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile, dimostrare che esiste una applicazione biiettiva $f$ di $A$ su $\mathbb{Q}$ tale che $x < y$ implica $f(x) < f(y)$.

○ **4.19** – Se $A \subset \mathbb{R}$ è un insieme numerabile tale che per almeno una coppia $x, y \in A$ con $x < y$ non esiste in $A$ uno degli elementi $u, v, w$ con $u < x < v < y < w$, allora tra $A$ e $\mathbb{Q}$ non esiste alcuna applicazione biiettiva che conserva l'ordine.
Dedurre che i numeri razionali non possono essere ordinati in successione crescente.

**4.20** – Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mostrare che

$$[\alpha] + [\beta] \leq [\alpha + \beta] \leq [\alpha] + [\beta] + 1.$$

**4.21** – Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, mostrare che
$$[\alpha][\beta] \le [\alpha\beta] \le [\alpha]\cdot[\beta] + [\alpha] + [\beta].$$

**4.22** – Se $\alpha \in \mathbb{R}^+$, allora è
$$10^{[\alpha]} \le [10^\alpha] < 10^{[\alpha]+1}.$$

**4.23** – Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{R}^+, k \ge 2$, è
$$\left[k \sin \frac{2}{k}\right] = 1.$$

∘ **4.24** – Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}, \alpha > 0, n > 0$; allora
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\alpha + \frac{k}{n}\right] = [n\alpha].$$

∘ **4.25** – Siano $n, a$ interi positivi; mostrare che il numero degli interi non superiori ad $n$ e non divisibili per $a$ è $n - \left[\frac{n}{a}\right]$.

∘ **4.26** – Determinare la massima potenza $A(n,p)$ dal numero primo $p$ che divide $n!$.

## § 5 – Disuguaglianze

**5.1** – Verificare che per ogni $r > 0$ è $r + \frac{1}{r} \ge 2$.

**5.2** – Sia $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, con $b > 0, d > 0$, allora
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

**5.3** – Se $k$ è il numero dei primi distinti che dividono $n$ allora
$$\log_{10} n \ge k \cdot \log_{10} 2.$$

**5.4** – Siano $a$ e $b$ reali non negativi, posto

$m_1 = \dfrac{a+b}{2}$ *(media aritmetica)*,

$m_2 = \sqrt{ab}$ *(media geometrica)*,

$m_3 = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ *(media armonica)*,

dimostrare che $m_3 \le m_2 \le m_1$.



**5.5** – Dimostrare che per $n \ge 2$ è

1) $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) > 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ $\quad (0 < a_i < 1)$

2) $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) > 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

**5.6** – Dimostrare la seguente disuguaglianza
$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\dots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

**5.7** – Dimostrare:

1) $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ per $\alpha > -1, n > 1$ intero

2) $(1-\alpha)^n > 1 - n\alpha$ per $\alpha < 1, n > 1$ intero

3) $(1+\alpha)^n < \dfrac{1}{1-n\alpha}$ per $-1 < \alpha < \frac{1}{n}, n \ge 1$ intero

4) $(1-\alpha)^n < \dfrac{1}{1+n\alpha}$ per $\frac{-1}{n} < \alpha < 1, n \ge 1$ intero

5) $\left(1 + \dfrac{\alpha}{m}\right)^n \cdot \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right)^n < 1$ per $0 < \alpha < n; m, n, > 0$ interi.

**5.8** – Dimostrare:

1) $(1+\alpha)^\mu > 1 + \mu\alpha$ per $\alpha > -1, \mu > 1$ razionale

2) $(1+\alpha)^\mu < 1 + \mu\alpha$ per $\alpha > -1, 0 < \mu < 1$ razionale

3) $(1+\alpha)^\mu < \dfrac{1}{1-\mu\alpha}$ per $0 < \alpha < \frac{1}{\mu}, \mu > 0$ razionale

4) $(1-\alpha)^\mu > 1 - \mu\alpha$ per $0 < \alpha < 1, \mu > 1$ razionale

5) $(1-\alpha)^\mu < 1 - \mu\alpha$ per $0 < \alpha < 1, 0 < \mu < 1$ razionale

6) $(1-\alpha)^\mu < \dfrac{1}{1+\mu\alpha}$ per $0<\alpha<1, \mu>0$ razionale

7) $\left(1+\dfrac{\alpha}{\mu}\right)^\mu \cdot \left(1-\dfrac{\alpha}{\nu}\right)^\nu < 1$ per $0<\alpha<\nu; \mu, > 0, \nu > 0$ razionali.

∘∘ **5.9** – Dimostrare le disuguaglianze di I.5.8 con $\mu, \nu$ reali.

**5.10** – Dimostrare che per $x>0, y>0, \mu>0, \nu>0, x \neq y$ è

$$(x^\mu \cdot y^\nu)^{\frac{1}{\mu+\nu}} < \frac{\mu x + \nu y}{\mu+\nu}.$$

**5.11** – Dimostrare che se $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, allora

$$\cos a < \frac{\sin a}{a} < 1.$$

**5.12** – Dimostrare che per $a > 1$ è

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} \quad (n>1).$$

∘∘ **5.13** – Siano $a_i \geq 0, b_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, N), p, q > 0$ tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^N a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^N a_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^N b_i^q\right)^{1/q}$$

*(disuguaglianza di Hölder).*

**5.14** – Siano $b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$.
Dimostrare che per $\nu \geq 1$ è

$$\left(\sum_{i=1}^N b_i\right)^\nu \leq N^{\nu-1} \cdot \sum_{i=1}^N b_i^\nu.$$



**5.15** – Dimostrare che per $x>0, y>0, \mu>0, \nu>0, x\neq y, a>1$ è

$$\frac{\mu \log_a x + \nu \log_a y}{\mu+\nu} < \log_a \frac{\mu x + \nu y}{\mu + \nu}.$$

**5.16** – Dimostrare che:

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \log_a x_i \leq \log_a \left(\sum_{i=1}^N \mu_i x_i\right)$$

$$\left(a > 1, \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \mu_i = 1, x_i > 0\right).$$

∘ **5.17** – Siano $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$.
Dimostrare che

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dots + \dfrac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

∘ **5.18** – Dimostrare che per $n \geq 2$ è:

$$\frac{n}{n+1-s_{n+1}} < (n+1)^{1/n} < 1 + \frac{s_n}{n}$$

dove

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

∘ **5.19** – Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

$$\frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha} < 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots + k^\alpha + \dots + n^\alpha < \frac{(n+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

$(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0)$.

∘∘ **5.20** – Mostrare che per $n \geq 1$ è

1) $\dfrac{2^{2n}}{2n} \leq \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \leq 2^{2n}$ e che per $\geq 5$ è

2) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \leq 2^{2n-2}$. Dedurre che

3) $\displaystyle\prod_{\substack{n<p\leq 2n \\ p \text{ primo}}} p \leq 2^{2n-2}$ e mostrare che

4) $\displaystyle\prod_{\substack{p\leq m \\ p \text{ primo}}} p \leq 2^{2m}$.

## § 6 – Disequazioni

Risolvere (in dipendenza dell'eventuale parametro) le seguenti disequazioni. Nel presente paragrafo i radicali di indice pari sono intesi in senso aritmetico e i radicali di indice dispari sono intesi nel campo relativo.

**6.1** – 1) $-6x^2 - x + 1 > 0$ ; 2) $-6x^2 - |x| + 1 > 0$.

**6.2** – 1) $x^3 - x^2 + x - 1 > 0$ ; 2) $x^3 - 2x^2 - x + 2 \geq 0$.

**6.3** – $x^3 - x^2 + ax - a \leq 0 \quad (a \in \mathbb{R})$.

**6.4** – 1) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} > 0$; 2) $2 < \dfrac{x-4}{x^2-1} \leq 4$,

3) $0 < \dfrac{2x^6 - x^3 - 3}{x^3 - 1} < 1$.

**6.5** – $\dfrac{x-3}{cx+1} < 0 \quad (c \in \mathbb{R})$.

**6.6** – 1) $\sqrt{x-2} > -1$; 2) $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$;

3) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 1$; 4) $0 < \dfrac{-1 + \sqrt{x^2 - 2x}}{2x} < 1$.

**6.7** – $\sqrt{\dfrac{2}{x} + |1 + x|} < 1$.

**6.8** – $\sqrt{\dfrac{x}{x^2 + c}} < 1 \quad (c \in \mathbb{R})$.

**6.9** – $-3 < \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{1 - \sqrt[3]{x^2}} \leq 0$.

**6.10** – 1) $\dfrac{\ln(|x| - 1)}{x} < 0$; 2) $\dfrac{\ln(x-2)}{\sqrt{1 + \ln(x-2)}} < 2$.

**6.11** – 1) $\cos(x + |x|) > 0$; 2) $\dfrac{1 - 2\sin x}{1 + 2\cos x} \leq 0$.

**6.12** 1) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - 2\sin x}} > 1, \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$;

2) $\ln|\tan x - 1| \geq 0, \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$.



**6.13** – Ricordando che :

$$\mathrm{Ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{Sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{Th}\, x = \frac{\mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Ch}\, x}, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

risolvere le seguenti disequazioni:

1) $\mathrm{Ch}\, x < 3$; 2) $\mathrm{Sh}\, x > 1$; 3) $\mathrm{Th}\, x > \dfrac{1}{2}$.

**6.14** – $\ln|2\,\mathrm{Th}\, x - 1| < 0$.

**6.15** – 1) $\dfrac{e^{2x} - e^x}{2e^{2x} - 5e^x + 2} > -1$; 2) $\dfrac{\sqrt{|1 - e^x| - 1}}{e^x - 4} \geq 1$.

**6.16** – $\dfrac{\tan^2 x - \sqrt{3}\tan x}{\tan^2 x - 1} < 1, \quad (0 \leq x \leq \pi)$.

**6.17** – $\dfrac{1 - \ln(x^2 + x)}{\ln(x-1)^2 - 1} \geq -1$.

**6.18** – $2^{\sqrt{\frac{x^2-4}{2x^2-5x+3}}} < \sqrt{2}$.

**6.19** – $0 < \dfrac{\mathrm{Sh}\, x - 1}{\mathrm{Sh}\, x(\mathrm{Sh}\, x + 1)} \leq \dfrac{1}{6}$.

**6.20** – $\ln \dfrac{x-1}{x-c} < \dfrac{1}{2} \quad (c \in \mathbb{R})$.

**6.21** – $\dfrac{\ln|\cos x|}{\cos^2 x - |\cos x| + 1} \geq 0$.

**6.22** – $\dfrac{\cos 2\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}}{\sin 2\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 4\pi^2)$.

**6.23** – $\ln \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 4}{\sqrt[3]{x} - 1} \leq \ln \sqrt[3]{|x|}$.

**6.24** – $\log_{1/2} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x} - 1} \geq \log_{1/2}(\sqrt[3]{x} + 3)$.

**6.25** – $\dfrac{4\sin^2 x - 3}{\sin x} > 2^{\frac{\cos x}{|\sin x|}}$.

**6.26** – $\sqrt{\dfrac{x^2 + 8|x| - 9}{x^2 - 1}} \geq x - 3$.

**6.27** – $\dfrac{5 + x + \sqrt{1-x}}{x^2 - 1} > \dfrac{2}{x-1}$.

6.28 – $$\frac{\sqrt{2\,\mathrm{Ch}^2 x - 5\,\mathrm{Sh}\, x}}{\sqrt{\mathrm{Ch}^2 x - 1} - 1} < 1.$$

6.29 – Determinare per quali valori della variabile reale $x$ sono definite le seguenti espressioni:

1) $\dfrac{1}{\ln(\cot x - \tan x)} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right);$

2) $\left(\dfrac{\sin x}{x^2 - 1}\right)^{\ln(6x^2+x-1)}$

## Capitolo II

# CAMPO COMPLESSO

## § 1 – Operazioni sui numeri complessi.

1.1 – Scrivere in forma algebrica $a + ib$ i numeri

$$\frac{1+i}{1-i},\quad \frac{1-i}{1+i},\quad \frac{i}{1-i},\quad \frac{i}{1+i};$$

i numeri di modulo $\rho = 4, 5, 2$ e argomento rispettivamente $\theta \equiv \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi \pmod{2\pi}$.

1.2 – Servendosi della formula del de Moivre, scrivere in forma algebrica $a + ib$ le potenze $(1+i)^n, (1-i)^n$ per $n = 2, 3, 4, 5$.

1.3 – Scrivere in forma trigonometrica i numeri $i, -i, 1+i, 1-i,$

$$-1-i, -1+i, 1+i\sqrt{3}, \sqrt{3}+i, (1+i)^n, \frac{1-i}{(1+i)^2}.$$

1.4 – Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri e segnarne le immagini sul piano complesso $\mathbb{C}$:

$$1+i\sqrt{3},\quad \frac{1}{1+i\sqrt{3}},\quad \frac{1}{(1+i\sqrt{3})^3},\quad \sqrt{1+i\sqrt{3}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2i}},\quad \left\{\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2i}\right\}^{-5}$$

**1.5** – Eseguire le operazioni algebriche indicate:

$$(2+5i)(7-i); \quad (7+i)(7-i); \quad \frac{2+5i}{7-i}; \quad (1+i\sqrt{3})(2-i);$$

$$\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)}{3+3i}; \qquad \frac{2-i\sqrt{3}}{2\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)}.$$

**1.6** – Si considerino i numeri complessi $z_1 = -2(1+i)$, $z_2 = 1+i\sqrt{3}$ ed il loro prodotto $z = z_1 \cdot z_2$.
Segnare su $\mathbb{C}$ le immagini di $z, \overline{z}, \frac{1}{z}$.

**1.7** – Dimostrare l'identità

$$\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right)^2 - \left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)^2 = \frac{8iab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

**1.8** – Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

Precisare quando valgono le uguaglianze.

**1.9** – Dimostrare le identità:

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}).$$

**1.10** – Dimostrare le identità:

1) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

2) $\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1 \qquad (\theta \in \mathbb{R}).$

**1.11** – Verificare che $1-3i$ è una radice cubica di $-2(13-9i)$ e determinare le due radici rimandenti.

**1.12** – Dimostrare che per $n \equiv 0 \pmod 4$ vale l'uguaglianza

$$1 + 2i + 3i^2 + \ldots + (n+1)i^n = \frac{n+2-ni}{2}.$$

Scrivere le formule analoghe per $n \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$.



**1.13** – Dimostrare l'uguaglianza

$$(-1+i\sqrt{3})^n + (-1-i\sqrt{3})^n = \begin{cases} 2^{n+1} & \text{per} \quad n \equiv 0 \pmod 3 \\ -2^n & \text{per} \quad n \equiv 1, 2 \pmod 3 \end{cases}.$$

**1.14** – Dimostrare che ogni $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z \neq 1$, si può scrivere nella forma

$$\frac{t+i}{t-i} \qquad , (t \in \mathbb{R}).$$

**1.15** – Trovare gli errori nella seguente catena di uguaglianze

$$-1 = \sqrt{+1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

**1.16** – Provare che per ogni $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ è

$$\frac{(c+|c|)^2}{c} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad \frac{(c+|c|)^2}{c} = 0$$

se e solo se $c \in \mathbb{R}^-$.
Dedurre che ogni numero complesso possiede una radice quadrata.

**1.17** – Provare che

$$\left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right| \leq \frac{|\alpha|^n - |\beta|^n}{|\alpha| - |\beta|} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}; \alpha \neq \beta; n \in \mathbb{N}).$$

∘∘ **1.18** – Per $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ poniamo

$$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots,$$

$$b_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \ldots,$$

$$c_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \ldots,$$

$$d_n = \binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \ldots.$$

Dimostrare che

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 = 2^{n-1}(2^{n-1}+1),$$

(Paasche–Marzetta).

∘ **1.19** – Mostrare che non esiste alcuna relazione d'ordine che renda $\mathbb{C}$ un campo ordinato.

## § 2 – Equazioni e identità nel campo complesso

**2.1** – Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$;
poniamo $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$.
Provare che:

1) $\exp 0 = 1$;
2) per ogni $z \in \mathbb{C}$, $\exp z \neq 0$;
3) per ogni $z_1, z_2, \in \mathbb{C}$, $\exp(z_1 + z_2) = (\exp z_1)(\exp z_2)$;
4) per ogni $z \in \mathbb{C}$, $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp z}$;
5) per ogni $K \in \mathbb{Z}$ e per ogni $z \in \mathbb{C}$ $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$.

**2.2** – Sia $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Si chiama *logaritmo di z*, $(\log z)$, ogni numero complesso $\omega$ tale che $\exp \omega = z$.
Mostrare che se $z = \rho \exp(i\theta)(\rho > 0, \theta \in \mathbb{R})$ esistono infiniti logaritmi di $z$ dati dalla seguente relazione

$$\log z = \ln \rho + i(\theta + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

**2.3** – Risolvere le seguenti equazioni:

1) $(z-1)^3 = -i$
2) $\log z = 3 + 5i$
3) $\exp 2z - 2i \exp z + 8 = 0$
4) $\log^2 \bar{z} + 2 \log \bar{z} + 4 - 4i = 0$.

**2.4** – Risolvere le seguenti equazioni:

1) $(1-z)^5 = (1+z)^5$
2) $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n = c \quad (c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$.



**2.5** – Risolvere l'equazione:

$$(z+1)^n = \exp(2ina) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

nei casi $a \in \mathbb{R}$, $a = 5i$, $a = 3 + 5i$.

**2.6** – Risolvere l'equazione:

$$4z^4 + 1 = 0.$$

Scomporre il binomio nel prodotto di quattro fattori lineari e nel prodotto di due fattori quadratici a coefficienti reali.

**2.7** – Per ogni $z \in \mathbb{C}$, poniamo

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2},$$
$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$
$$\mathrm{Sh}\, z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2},$$
$$\mathrm{Ch}\, z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}.$$

Verificare che

1) $\sin(z + 2k\pi) = \sin z, \quad \cos z = (z + 2k\pi) = \cos z$,
2) $\mathrm{Sh}\,(z + 2k\pi i) = \mathrm{Sh}\, z, \quad \mathrm{Ch}\, z = (z + 2k\pi i) = \mathrm{Ch}\, z$,
3) $\cos z = \mathrm{Ch}\,(iz), \quad \sin z = -i\, \mathrm{Sh}\,(iz)$.

**2.8** – Verificare le seguenti identità

1) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;
2) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;
3) $\mathrm{Sh}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Sh}\, z_1\, \mathrm{Ch}\, z_2 + \mathrm{Ch}\, z_1\, \mathrm{Sh}\, z_2$;
4) $\mathrm{Ch}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Ch}\, z_1\, \mathrm{Ch}\, z_2 + \mathrm{Sh}\, z_1\, \mathrm{Sh}\, z_2$.

**2.9** – Risolvere le seguenti equazioni:

1) $\cos(iz^2) + i \sin(iz^2) = 1$
2) $\mathrm{Ch}\,(z^2) + \mathrm{Sh}\,(z^2) = 0$.

**2.10** – Risolvere l'equazione

$$\sin \frac{2\pi z}{1 + z^2} = 0.$$

Dimostrare che le soluzioni, escluso lo zero, hanno modulo 1.
Stabilire le simmetrie dell'insieme delle loro immagini su $\mathbb{C}$.

**2.11** – Risolvere l'equazione
$z^5 = (1-i)(|2i - \alpha^3|^2 + |2i + \alpha^3|^2) \quad (\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1).$

**2.12** – Risolvere l'equazione

$$|\cos iz + \operatorname{Sh} z| = \exp(iz).$$

**2.13** – Mostrare che l'equazione

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^m = \frac{1+ia}{1-ia} \qquad (a \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N})$$

ha $m$ radici reali. Determinarle.

**2.14** – Provare che se $n\theta (n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R})$ non è multiplo di $\pi$, vale l'identità

$$\operatorname{Re}\left((\cot\theta + i)^n\right) = \cot n\theta \operatorname{Im}\left((\cot\theta + i)^n\right).$$

**2.15** – Dimostare l'identità

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1 + i\tan\frac{\theta}{2}}{1 - i\tan\frac{\theta}{2}}\right) = \cos\theta \ (\theta \in \mathbb{R},\ \theta \neq (2k+1)\pi).$$

**2.16** – Determinare le soluzioni $\alpha_1, \alpha_2$ dell'equazione

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0.$$

Posto

$w_1(m) = \alpha_1^m + \alpha_1^{-m}, w_2(m) = \alpha_2^m + \alpha_2^{-m} \quad (m \in \mathbb{Z})$

verificare che al variare di $m, w_1(m)$ e $w_2(m)$ assumono un numero finito di valori distinti: determinarli.

**2.17** – Dare condizioni su $a, b, c$ affinchè l'equazione

$$az + b\overline{z} + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{C})$$

abbia una sola soluzione.



**2.18** – $\alpha \in \mathbb{C}$ si dice *algebrico* se esiste un polinomio

$P(z) \equiv a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \quad a_i \in \mathbb{Z}$

per $i = 0, 1, \ldots n; a_n \neq 0$, di cui $\alpha$ è uno zero.
Dimostrare che l'insieme dei numeri algebrici è numerabile (vedi I.4.17).

**2.19** – Sia $P(z) \equiv a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, a_i \in \mathbb{R}$ per $i = 0, 1, \ldots, n$; $a_n \neq 0$.
Dimostrare che se $P(\alpha) = 0$ anche $P(\overline{\alpha}) = 0$.

**2.20** – Dimostrare che il prodotto delle radici $n$–esime di $a$ vale $(-1)^{n+1}a$.

∘ **2.21** – Siano $z_1, z_2, \ldots z_n$ le radici $n$–esime di $a$.
Verificare che

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^r = \begin{cases} na^{r/n} & \text{se} \quad r \in \mathbb{N},\ r \equiv 0 \ (\text{mod } n) \\ 0 & \text{se} \quad r \in \mathbb{N},\ r \not\equiv 0 \ (\text{mod } n) \end{cases}.$$

∘ **2.22** – Calcolare i prodotti:

$$1) P = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) - 1\right),$$

$$2) S = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}.$$

**2.23** – Calcolare

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{2}{2 - z_k}\right)$$

dove $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sono le radici $n$–esime dell'unità.

∘ **2.24** – Dati $a_p \in \mathbb{C}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad -n \leq p \leq n-1$, si definiscono $2n$ numeri $b_q, q \in \mathbb{Z}, -n \leq q \leq n-1$, mediante le relazioni

$$b_q = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{p=-n}^{n-1} a_p \exp\left(ipq\frac{\pi}{n}\right).$$

Mostrare che

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{p=-n}^{n-1} b_q \exp\left(-ipq\frac{\pi}{n}\right).$$

∘ **2.25** – Dimostrare che

$$\left|\frac{\exp(ixu) - 1}{u}\right| \le |x| \quad (x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R} - \{0\}).$$

∘ **2.26** – Dimostrare la seguente identità

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - \sum_{1 \le i < j \le n} |a_i \bar{b}_j - a_j \bar{b}_i|^2$$

per $(a_i, b_i \in \mathbb{C})$. (*Identità di Lagrange*).
Ricavare la disuguaglianza (di Cauchy) analoga alla I.5.13 nel caso $p = q = 2$.

## § 3 – Trasformazioni sul piano complesso

Gli esercizi di questo paragrafo riguardano fatti di geometria analitica piana espressi mediante l'uso dei numeri complessi.

**3.1** – Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, scrivere il numero complesso la cui immagine sul piano è:

1) simmetrica di $z_0$ rispetto all'origine,
2) simmetrica di $z_0$ rispetto all'asse reale,
3) simmetrica di $z_0$ rispetto all'asse immaginario
4) simmetrica di $z_0$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante,
5) simmetrica di $z_0$ rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante.

Scrivere l'espressione di questi numeri nelle forme algebrica, trigonometrica, esponenziale.



**3.2** – Segnare sul piano il luogo delle immagini di $z$, quando $z$ è definito dalle seguenti condizioni:

1) $0 \le \operatorname{Re} z < 2\pi$, 2) $0 \le \operatorname{Re}(iz) < 2\pi$,

3) $\operatorname{Re}(z^2) = c$, 4) $\operatorname{Im}(z^2) = c$

5) $|z^3| < 2$, 6) $\left|\frac{1}{z}\right| < c$,

7) $\left|\frac{1}{z}\right| \ge c$, 8) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \le c$,

9) $\left|\frac{z-4}{z+4}\right| \ge 3$, 10) $\left|\frac{z}{z+4}\right| = 1$,

11) $\left|\frac{z-\alpha}{z+\beta}\right| = c \ (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$.

**3.3** – Siano $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, dimostrare che

1) $\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) \equiv z_2 \hat{z}_3 z_1 (\bmod 2\pi)$,

2) $z_1, z_2, z_3$ sono allineati se e solo se $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R}$.

**3.4** – Dimostrare che tutte e sole le rette del piano $\mathbb{C}$ hanno equazione

$$az + \overline{\alpha z} + c = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{R}).$$

**3.5** – Dimostrare che tutte e sole le circonferenze e le rette del piano hanno equazione

$$az\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + c = 0 \qquad (\beta \in \mathbb{C}; \quad a, c, \in \mathbb{R}).$$

Dare condizioni su $a, \beta, c$ perchè le circonferenze siano reali.

**3.6** – La circonferenza di centro $z_0$ e raggio $\rho$ si rappresenta in uno qualunque dei due modi seguenti:

$$|z - z_0| = \rho; \quad z\bar{z} - (z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) + z_0\bar{z}_0 - \rho^2 = 0.$$

3.7 – Determinare il numero $z$ di minimo modulo che verifica l'equazione:

$$|z - i| = |z + 3i + 4|.$$

3.8 – Individuare e segnare sul piano la regione $E$ dei punti immagine dei numeri $z$ tali che

$$\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, \quad |z - 4| < |z + 5|.$$

3.9 – Determinare $z$ che verifica simultaneamente le seguenti equazioni:

$$|z - 4i| = |z - 2|, \quad \arg z \equiv \frac{\pi}{4} (\bmod 2\pi).$$

3.10 – Determinare $z$ per cui è

$$\frac{z + 1 - i}{z + 1} \in \mathbb{R}.$$

Individuare la linea del piano descritta dalle immagini di tali numeri.

3.11 – Dimostrare che se

$$z' = R\frac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}} \quad (R > 0, \quad \operatorname{Im} \alpha \neq 0)$$

allora $|z'| \gtreqless R$ equivale a $\operatorname{Im} z \gtreqless 0$ se $\operatorname{Im} \alpha < 0, |z'| \gtreqless R$ equivale a $\operatorname{Im} z \lesseqgtr 0$ se $\operatorname{Im} \alpha > 0$.

3.12 – Studiare le trasformazioni elementari di $\mathbb{C}$ in sé, stabilendo in ogni caso quali siano gli elementi uniti.
Riferendosi al piano determinare le linee che vengono mutate in sé dalle trasformazioni.

1) $z' = z + \beta \qquad (\beta \in \mathbb{C})$
2) $z' = kz \qquad (k \in \mathbb{R}^+)$
3) $z' = \exp(i\varphi) \cdot z \qquad (\varphi \in \mathbb{R})$
4) $z' = \alpha z \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$
5) $z' = \frac{1}{z}$.



3.13 – Dimostrare che ogni trasformazione lineare fratta

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

con $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ $(\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{C})$, si può pensare come ottenuta applicando successivamente trasformazioni elementari (vedi II.3.12).

∘ 3.14 – Dimostrare che ogni trasformazione lineare fratta

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

con $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ pensata come trasformazione del piano $\mathbb{C}$ in sé, trasforma cerchi o rette in cerchi o rette, fasci di cerchi o di rette in fasci di cerchi o di rette.

3.15 – Indichiamo con $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, è utile estendere la trasformazione

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

da $S$ su $S$ nel seguente modo:

per $z \neq -\frac{\delta}{\gamma} \quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$,

per $z = -\frac{\delta}{\gamma} \quad z' = \infty$

per $z = \infty \quad z' = \frac{\alpha}{\gamma}$.

La trasformazione così definita è biunivoca da $S$ ad $S$.
Determinare gli elementi uniti di

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad \text{con} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

∘ 3.16 – Siano

$$z_1, z_2, z_3, z'_1, z'_2, z'_3 \in S \text{ (II.3.15)}, \quad z_i \neq z_j, \quad z'_2 \neq z'_j,$$

$$i, j = 1, 2, 3, i \neq j.$$

Dimostare che esiste una e una sola trasformazione lineare fratta che applica $z_i$ in $z'_i, i = 1, 2, 3$.

**3.17** – Trovare una condizione necessaria e sufficiente sui numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ affinché la trasformazione

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

applichi l'insieme $\operatorname{Im} z \geq 0$ in sé.

**3.18** – Si consideri il piano $\mathbb{C}$. Siano $z$ e $z'$ legati dalla relazione

$$(z-2)(z'+3) - 3(z-5) = 0.$$

Determinare la curva trasformata della circonferenza $|z'| = 3$.

**3.19** – Considerata la trasformazione

$$z' = \frac{1}{z + \overline{z}},$$

determinare la trasformata della linea $|z| = R$ al variare di $R$.

**3.20** – Individuare e tracciare sul piano la linea di equazione

$$|z+i| = 4 - |z-i|$$

e la trasformata di tale linea mediante la trasformazione $z' = iz$.

# Capitolo III

# SUCCESSIONI NUMERICHE

## § 1 – Limiti delle successioni. Simboli $\sim, o(\cdot), O(\cdot), \asymp$. Classe limite.

**1.1** – Scrivere esempi di successioni:
monotone; divergenti a $+\infty$, a $-\infty$, all'infinito; convergenti a $4, 4^-, \pi, \pi^+$; irregolari limitate, irregolari limitate superirmente e non inferiormente, irregolari illimitate inferiormente e superiormente.

**1.2** – Verificare facendo uso diretto della definizione di limite, che per $n \to +\infty$

1) $\dfrac{n}{n+1} \to 1^-$ 2) $e^{\frac{1}{n}} \to 1^+$

3) $\dfrac{ne^{\frac{1}{n}}}{n+1} \to 1$ 4) $\dfrac{n^2+1}{n+3} \to +\infty.$

**1.3** – Dimostrare che se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, allora

$$\sin a_n \to 0 \quad \text{e} \quad \cos a_n \to 1 \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

**1.4** – Dimostrare che se $a_n \to A$ $(|A| < \infty)$ per $n \to +\infty$, allora è

$\sin a_n \to \sin A$ e $\cos a_n \to \cos A$ per $n \to +\infty$.

**1.5** – Data una successione $\{a_n\}$ $(a_n \in \mathbb{R}$ o $a_n \in \mathbb{C})$, si dice che verifica la *condizione di Cauchy* (o che è una *successione di Cauchy*) se
per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N$ tale che per $n, m \geq N$ è $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Verificare la validità della condizione di Cauchy per le seguenti successioni:

1) $\left\{1+\frac{1}{n^2}\right\}$ 2) $\left\{\cos\frac{1}{n}\right\}$.

**1.6 –** Mostrare che le seguenti successioni non verificano la condizione di Cauchy:

1) $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ 2) $\{s_n\}$ ove $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

**1.7 –** Mostrare che ogni successione di Cauchy è limitata.

**1.8 –** Dimostrare che se $t_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ allora

$$\{t_n\}, n=1,2,\ldots \text{ ha un minimo.}$$

**1.9 –** Dimostrare che ogni successione convergente possiede, come insieme numerico, l'estremo superiore e l'estremo inferiore ambedue finiti, possiede un elemento massimo oppure un elemento minimo, oppure entrambi.

**1.10 –** Sia $\{a_n\}, a_n>0, \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
Dimostrare che esistono infiniti indici $n$ per cui

$$a_n > a_{n+k} \quad \text{per} \quad k=1,2,3,\ldots.$$

**1.11 –** Dimostrare che la convergenza di $\{s_n\}$, $n=0,1,\ldots$ implica la convergenza di $\{|s_n|\}$. È vero il viceversa?

**1.12 –** Calcolare il limite per $n \to +\infty$ nelle seguenti successioni:

1) $\{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}\}$ 2) $\left\{n+(-1)^n n^{\frac{2}{3}}\right\}$

3) $\left\{\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right\}$ 4) $\left\{\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n}-1}\right\}$



5) $\left\{\frac{3n^2-n+1}{4n^2+10}\right\}$ 6) $\left\{\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right\}$

8) $\left\{\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}\right\}$ 7) $\left\{\frac{n!}{(n+1)!-n!}\right\}$

9) $\left\{\frac{\sqrt[3]{n}\sin(n!)}{n+1}\right\}$

10) $\left\{n\left(1-\sqrt{\left(1-\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{b}{n}\right)}\right)\right\}$, $(a,b\in\mathbb{R})$

11) $\left\{c^{(n-1)/(n+2)}\right\}$ $(c>0)$ 12) $\left\{c^{1/2^n}\right\}$ $(c>0)$

13) $\left\{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n\right\}$ $(x\in\mathbb{R})$ 14) $\left\{n\ \ln\frac{n+1}{n^2+2}\right\}$

15) $\left\{\sqrt{n}\ \ln\frac{n^2+1}{n-1}\right\}$ 16) $\left\{\sqrt[n]{c^n+c^{-n}}\right\}$ $(c>0)$.

**1.13 –** Calcolare il limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni:

1) $\left\{\frac{n^3+n^2}{e^{n/2}}\right\}$ 2) $\left\{\frac{\ln^5 n+5\ \ln^4 n}{\sqrt[10]{n}-20}\right\}$

3) $\left\{\frac{n!-e^n}{n^{10}+\ln\ n}\right\}$ 4) $\left\{\frac{n!\ \ln\ n-n^3}{ne^n+n^2}\right\}$

5) $\left\{\frac{n!\ \ln\ n+n}{n^{n+1}+e^{\sqrt{n}}}\right\}$ 6) $\{\sqrt[n]{n}\}$

7) $\left\{\sqrt[n]{n\ \ln\ n}\right\}$ 8) $\left\{(n+1+n\cos n)^{\frac{1}{3n+n\sin n}}\right\}$.

**1.14 –** Calcolare il limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni:

1) $\left\{n\ \ln\left(1+\frac{3}{n}\right)\right\}$ 2) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$

/ 3) $\left\{n^2 \ln \dfrac{n+4}{n^{5/2}-1}\right\}$ / 4) $\left\{\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^3}\right\}$

/ 5) $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$ / 6) $\left\{\dfrac{n!}{n^{n/2}}\right\}$

/ 7) $\left\{\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^n : \dfrac{1}{n}\right\}$ / 8) $\left\{n\left(3^{\frac{n+1}{n^2+1}}-1\right)\right\}$

/ 9) $\left\{\left(\sqrt[3]{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}}-1\right)n^2\right\}$ / 10) $\left\{n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\right\}$ $(x>0)$

/ 11) $\left\{\dfrac{(n+1)^{n+\frac{1}{\ln n}}}{(n-1)^{\sqrt{1+n^2}}}\right\}$.

**1.15 –** Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si considerino le seguenti relazioni:

1) se $a_n \neq 0$ (definitivamente) si pone $b_n \sim a_n$ per $n \to +\infty$ ($b_n$ *asintotico* ad $a_n$) se

$$\frac{b_n}{a_n} \to 1 \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

2) se $a_n > 0$ (definitivamente) si pone $b_n = o(a_n)$ per $n \to +\infty$ ($b_n$ è *o-piccolo* di $a_n$) se

$$\frac{b_n}{a_n} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

3) se $a_n > 0$ (definitivamente) si pone $b_n = O(a_n)$ per $n \to +\infty$ ($b_n$ è *O-grande* di $a_n$) se esiste $k > 0$ tale che

$$\frac{|b_n|}{a_n} < k \quad \text{definitivamente.}$$

4) se $a_n > 0$ (definitivamente) si pone $b_n \asymp a_n$ per $n \to +\infty$ ($b_n$ ha *l'ordine di grandezza* di $a_n$) se esistono $H, K > 0$ tali che

$$H a_n \geq |b_n| \geq K a_n \quad \text{definitivamente.}$$



Dimostrare:

a) la relazione $\sim$ è di equivalenza nell'ambito delle successioni definitivamente non nulle.

b) la relazione $\asymp$ è di equivalenza nell'ambito delle successioni definitivamente positive.

c) determinare le mutue implicazioni fra le quattro relazioni precedenti.

**1.16 –** Mostrare con esempi che:

1) da $a_n - b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ non segue in generale $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$

2) da $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ non segue in generale $a_n - b_n \to 0$ per $n \to +\infty$

Dare delle condizioni sufficienti su $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ affinché una o entrambe delle implicazioni precedenti siano verificate.

**1.17 –** Si considerino le relazioni $\sim$, $o(\ldots)$, $O(\ldots)$, $\asymp$ definite in III.1.15. Per ciascuna delle seguenti coppie di successioni stabilire quali di queste relazioni valgono.

1) $\{n\}$, $\{e^n\}$ 2) $\{\ln\ n\}$, $\{n\}$

3) $\{n\}$, $\left\{\left[\dfrac{n}{5}\right]+\ln\ n\right\}$ 4) $\left\{e^{\text{mant}\sqrt{n}}\right\}$, $\{\sqrt{n}\}$

5) $\{(-1)^n\}$, $\left\{e^{\text{mant}\sqrt{n}}\right\}$

6) $\left\{e^{-n^\varepsilon}\right\}$, $\{n^{-k}\}$ $(\varepsilon > 0,\ k > 0)$

7) $\{\sqrt{n}+\ln^3 n\}$, $\left\{\sqrt{n+1}\right\}$

8) $\{\sqrt{n}+\sin na\}$, $\left\{\sqrt[3]{n^2}\right\}$ $(a \in \mathbb{R})$

9) $\left\{\left[\left|\sin\ n\dfrac{\pi}{k}\right|\right]\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{\ln\ n}\right\}$ $(k \in \mathbb{N})$

10) $\{\ln\ \ln\ n\}$, $\{\ln\ n\}$

11) $\{n\ \ln\ n\}$, $\{n^{1+d}\}$ $(d \in \mathbb{R})$

12) $\left\{1+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2n+1}\right\}$, $\{\ln\sqrt{n}\}$

13) $\{1^s + 2^s + \ldots + n^s\}$, $\{(n+\sqrt{n})^{s+1}\}$ $(s \in \mathbb{R}, s > 0)$.

**1.18** – Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che valga la relazione

$$\log_{a_n} b_n \sim a\, n^b \ln^c n \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

ove

$$a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}, \quad b_n = \frac{n+1}{n} e^{1/n^2}.$$

**1.19** – Calcolare il limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni

1) $\left\{\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right\}$

2) $\left\{\dfrac{1-2+3-4\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$

3) $\left\{\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}\right\}$

4) $\left\{n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}} - n\sqrt{2}\right)\right\}$

5) $\left\{(n+1)^{\frac{n\pm1}{n}} - (n + a \ln n)\right\}$ $(a \in \mathbb{R})$.

**1.20** – Dimostrare che:

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right) = 2$

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{e^{n^2+n}} + \frac{n!}{e^{n^2+n+1}} + \ldots + \frac{n!}{e^{n^2+2n}}\right) = 0.$

**1.21** – Calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right).$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$



**1.22** – Dimostrare che se $\theta_n \to \theta$ e $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ allora

$$\left(1+\frac{\theta_n}{a_n}\right)^{a_n} \to e^\theta \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

**1.23** – Dimostrare che se $\varepsilon_n \to 0$, $a_n \to a > 0$, $a \neq 1$, per $n \to +\infty$, allora

$$\frac{1}{\varepsilon_n}\log_{a_n}(1+\varepsilon_n) \to \frac{1}{\ln a} \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

**1.24** – Dimostrare che se $\sigma_n \to 0$, $\sigma_n \neq 0$, $a_n \to a > 0$ per $n \to +\infty$, allora

$$\frac{a_n^{\sigma_n} - 1}{\sigma_n} \to \ln a \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

**1.25** – Dimostrare che se $\delta_n \to 0$, $\delta_n \neq 0$, $a_n \to a$ per $n \to +\infty$, allora

$$\frac{(1+\delta_n)^{a_n} - 1}{\delta_n} \to a \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

**1.26** – Dimostrare che se $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n \neq 0$, allora

$$\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1 \quad \text{e} \quad \frac{\cos \varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} \to -\frac{1}{2} \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

**1.27** – Calcolare il limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni:

1) $\left\{n^2 \ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

2) $\left\{n(e^{\tan\frac{1}{n}} - 1)\right\}$

3) $\left\{\left(\cos\dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}.$

**1.28** – Siano $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$, $a_n \neq 0$ (definitivamente).
Se esiste $\mu \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{b_n}{a_n^\mu} \to c \neq 0 \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

si dice che $b_n$ è infinitesimo di ordine $\mu$ rispetto ad $a_n$ considerato come infinitesimo campione.
Determinare, se è possibile, l'ordine di infinitesimo rispetto ad $\dfrac{1}{n}$ di ciascuna delle seguenti successioni:

1) $\left\{\sin \dfrac{1}{n}\right\}$ 2) $\left\{\sin \dfrac{1}{\ln n}\right\}$

3) $\left\{\mathrm{Sh}\, \dfrac{1}{n!}\right\}$ 4) $\left\{\mathrm{Ch}\, \dfrac{1}{n^2} - 1\right\}$

5) $\left\{e^{\frac{1}{\sqrt{n}+\ln n}} - \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right\}$ 6) $\left\{\mathrm{Sh}\, \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right\}$

7) $\left\{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - \cos n^{-1/3}\right\}$ 8) $\left\{\ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{n}+\ln n}{\sqrt[3]{n+\ln n}}\right)\right\}$.

**1.29** – Siano $a_n \to +\infty$, $b_n \to \infty$ per $n \to +\infty$.
Se esiste $\mu \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{b_n}{a_n^\mu} \to c \neq 0 \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

si dice che $b_n$ è infinito di ordine $\mu$ rispetto ad $a_n$ considerato come infinito campione.
Determinare, se è possibile, l'ordine di infinito rispetto ad $e^n$ di ciascuna delle seguenti successioni:

1) $\{e^{3n}\}$ 2) $\{\ln n\}$ 3) $\{e^{\sqrt{n}}\}$

4) $\left\{\mathrm{Sh}\left(\dfrac{n}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ 5) $\{\mathrm{Ch}\, \pi n\}$ 6) $\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}$

7) $\{n^2 e^n\}$ 8) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2/2}\right\}$.



**1.30** – Calcolare il limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni in $\mathbb{C}$:

1) $\left\{\dfrac{i^n}{n}\right\}$ 2) $\left\{\dfrac{(1+i)^n}{n}\right\}$

3) $\left\{\dfrac{n}{n+3i} - \dfrac{i\cdot n}{n+1}\right\}$ 4) $\left\{n\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n\right\}$

5) $\left\{\dfrac{z^n}{n!}\right\}$ $(z \in \mathbb{C})$.

**1.31** – Sia $\{z_n\}$ $(z_n = x_n + iy_n)$ una successione di numeri complessi non nulli tale che $z_n \to 0$ per $n \to +\infty$
Mostrare che se $\omega_n = o(x_n)$ allora è

$$\omega_n = o(|z_n|)$$

e se $\omega_n = o(y_n)$ allora è

$$\omega_n = o(|z_n|).$$

**1.32** – Sia $\{a_n\}$, $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf a_n = 0$.
Dimostrare che vi sono infiniti indici $n$ per cui $a_n < a_k$ per $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

**1.33** – Determinare la classe limite per $n \to +\infty$ per ciascuna delle seguenti successioni:

1) $\left\{\sin \dfrac{n\pi}{3}\right\}$ 2) $\left\{\tan \dfrac{n\pi}{3}\right\}$

3) $\{\ln n - [\ln n]\}$ 4) $\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}]\}$

5) $\left\{\cos^2\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{1}{n}\right)\right\}$

6) $0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, \ldots$

7) $\left\{\left[\dfrac{n}{10}\right]\right\}$ 8) $\left\{\mathrm{mant}\left(\dfrac{n}{10}\right)\right\}$.

1.34 – Determinare, per ogni valore del parametro $m \in \mathbb{N}$, la classe limite per $n \to +\infty$ delle successioni $\{a_n^{(m)}\}$ ove

$$1)\ a_n^{(m)} = \frac{n^5\left(\sin\frac{1}{n}\right)^m}{n^2+1} \cdot \left[\sin\frac{\pi n m}{2}\right]$$

$$2)\ a_n^{(m)} = (\cos \pi n)^m \cdot \frac{(n+1)^{m+1}}{n^2}.$$

1.35 – Determinare la classe limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni in $\mathbb{C}$

1) $\{i^n\}$

2) $\left\{\exp\left(i\frac{n\pi}{k}\right)\right\},\ k \in \mathbb{N}$

3) $\{\exp(i\,r\,n\pi)\},\ r \in \mathbb{Q}$.

1.36 – Sia $\{z_n\}$ una successione di numeri complessi non nulli tale che $z_n \to 0$ per $n \to +\infty$.
Mostrare che

$$\frac{\exp z_n - 1}{z_n} \to 1 \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

1.37 – Sia $\{z_n\}$ una successione di numeri complessi non nulli tale che $z_n \to 0$ per $n \to +\infty$.
Mostrare che:

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin z_n}{z_n} = 1$ 2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos z_n - 1}{z_n^2} = -\frac{1}{2}$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Sh}\ z_n}{z_n} = 1$ 4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Ch}\ z_n - 1}{z_n^2} = \frac{1}{2}$.



## § 2 – Successioni ricorrenti

2.1 – Data la successione $\{a_n\}$ dove $a_1 = A$ e $a_{n+1} = \frac{a_n}{4} + 1$, scrivere l'espressione esplicita del termine generale e calcolarne il limite.

2.2 – Siano

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1 + \frac{1}{2},\ a_k = a_{k-1} + \frac{1}{2}(a_{k-1} - a_{k-2}).$$

Scrivere l'espressione esplicita del termine generale e calcolarne il limite.

2.3 – Sia $a_o > 0$ e $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$.
Dimostrare che $\{a_n\}$ converge e calcolarne il limite.

2.4 – Sia $a_o = 1$ e $a_{n+1} = \sin a_n$.
Dimostrare che $\{a_n\}$ converge e calcolarne il limite.

2.5 – Sia $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.
Dimostrare che $\{a_n\}$ converge e determinarne il limite.

2.6 – Sia $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.
Dimostrare che $\{a_n\}$ converge e $a_n < 2$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2.7 – Sono date $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ tali che

$$u_n \le u_{n+1},\ v_n \ge v_{n+1},\ u_n \le v_n\ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

1) Dimostrare che $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ sono convergenti e

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \le \lim_{n\to+\infty} v_n;$$

se $u_n - v_n \to 0$ per $n \to +\infty$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

2) Applicare il risultato precedente alle successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ così definite:

$$0 < u_\circ < v_\circ,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n \cdot v_n},$$
$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}\ (n = 0,1,2,\ldots).$$

**2.8** – Data la successione $\{u_n\}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ dove

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}$$

dimostrare che le successioni

$$\{n\,u_n^2\} \quad \text{e} \quad \left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)u_n^2\right\}$$

sono convergenti ad uno stesso limite.

**2.9** – Si consideri $\{v_n\}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ così definita:

$-1 < v_1 < 0,\ v_n = v_{n-1} + (v_{n-1})^2 \quad (n = 2,3,4,\ldots).$

Studiare il carattere di $\{v_n\}$ e determinarne il limite se esiste.

**2.10** – Determinare $\lim\limits_{n\to+\infty}$ sup e $\lim\limits_{n\to+\infty}$ inf di $\{a_n\}$ definita nel seguente modo:

$$a_1 = 0,\ a_{2m} = \frac{a_{2m-1}}{2},\ a_{2m+1} = \frac{1}{2} + a_{2m}.$$

∘ **2.11** – Dimostrare che se $x > 0$ e $\{x_n\}$ è definita da $x_\circ = x,\ x_{n+1} = (x_n)^{1/2}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ allora le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ così definite

$$a_n = 2^n(x_n - 1),\ b_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

convergono allo stesso limite $\Phi(x)$.
Mostrare inoltre:



*a)* $\Phi(1) = 0$

*b)* $\Phi(xy) = \Phi(x) + \Phi(y)$

*c)* $\Phi(x) \le \Phi(y)$ se $x \le y$.

∘ **2.12** – Sia $\{x_n\}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ definita da

$$x_\circ = x,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{1+\sqrt{1+x_n^2}}\ (n = 0,1,2,\ldots)$$

e $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano così definite:

$$a_n = 2^n x_n,\ b_n = \frac{2^n x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}.$$

Mostrare che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono allo stesso limite.
Detto $\Phi(x)$ tale limite, si potrebbe mostrare che vale l'equazione funzionale

$$\Phi(x) + \Phi(y) = \Phi\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

cioè $\Phi(x)$ è la funzione arctan $x$.

## § 3 – Complementi sui limiti di successioni

**3.1** – Dimostrare che se $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, $\sup E = s \notin E$, allora esiste $\{a_n\}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, $a_{n+1} \ge a_n$, $a_n \in E$ tale che $a_n \to s$ per $n \to +\infty$.

**3.2** – Si consideri $\{a_k\}$, $a_k > 0$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ e $a_k \to 0$ per $k \to +\infty$.
Posto $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ si dimostri che vale la relazione

$$\sqrt{s_{n+1}} - \sqrt{s_n} \sim \frac{a_{n+1}}{2\sqrt{s_n}} \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

**3.3** – Data $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, dimostrare che se $a_n + a_{n+1} \to \mathcal{V}$ per $n \to +\infty$ e $a_n + a_{n+2} \to \mathcal{V}_1$ per $n \to +\infty$, allora

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \quad \text{e} \quad a_n \to \frac{1}{2}\mathcal{V} \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

**3.4** – Dimostrare che per ogni coppia di successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sup(a_n + b_n) \le \lim_{n\to+\infty} \sup a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n.$$

Dare un esempio per cui vale la disuguaglianza in senso stretto.

**3.5** – Data $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup a_n = \inf_k \left(\sup_{n>k} a_n\right)(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \inf a_n = \sup_k \left(\inf_{n>k} a_n\right)(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si conviene che $\inf(+\infty) = +\infty$, $\sup(-\infty) = -\infty$.

**3.6** – Dimostrare che da $b_n \sim B_n$ per $n \to +\infty$ segue $a^{b_n} \sim a^{B_n}$ $(a > 0,\ a \ne 1)$ se e solo se $b_n - B_n = o(1)$ per $n \to +\infty$.

**3.7** – Dimostrare che da $a_n \to a \ne 0$ per $n \to +\infty$, $a_n \ne 1$ definitivamente, e $b_n - B_n = o(1)$ per $n \to +\infty$, segue $a_n^{b_n} \sim a^{B_n}$ per $n \to +\infty$ se e solo se $B_n(a - a_n) \to 0$ per $n \to +\infty$.

∘∘ **3.8** – Per ogni $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ si consideri la successione $\{t_n\}$ ove

$$t_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}.$$

Dimostrare che se $a_n \to a$ allora $t_n \to a$ per $n \to +\infty$.
Mostrare che esistono successioni $\{a_n\}$ irregolari che danno luogo a successioni $\{t_n\}$ convergenti.



**3.9** – Per ogni $\{a_n\}$, $a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ si consideri la successione $\{q_n\}$ ove

$$q_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Dimostrare che se $a_n \to a$, allora $q_n \to a$ per $n \to +\infty$.
Mostrare che esistono successioni $\{a_n\}$ irregolari che danno luogo a successioni $\{q_n\}$ convergenti.

∘∘ **3.10** – Sia $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ con $a_n \to a$ per $n \to +\infty$.
Posto

$$\delta_n = \frac{1}{2^n} a_1 + \frac{1}{2^{n-1}} a_2 + \ldots + \frac{1}{2} a_n$$

dimostrare che $\delta_n \to a$ per $n \to +\infty$.

∘ **3.11** – Ridurre il calcolo di

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$$

al calcolo di

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

∘ **3.12** – Dimostrare che

$$\ln\ n! = n \ln\ n - n + o(n) \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

(Formula di De Moivre – Stirling).

**3.13** – Dimostrare che

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} < e.$$

**3.14** – Sia $\{a_n\}$, $a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ per $n \to +\infty$.
Dimostrare che

$$\sqrt[n]{a_n} \to 1 \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

Mostrare con un esempio che, in generale, non vale il viceversa.

∘∘ **3.15** – Dimostrare che la classe di limite di $\{\exp(i\,n)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ è la circonferenza $|z| = 1$.

∘∘ **3.16** – Data una successione $\{t_n\}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, supponiamo che esista una successione $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \to 0$ per $n \to +\infty$ tale che

$$t_{n+1} > t_n - \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dimostrare che la classe limite di $\{t_n\}$ è un intervallo (infinito, finito o ridotto a un solo punto).

∘ **3.17** – Date $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ con $b_n > 0$, $B_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n \to +\infty$, $\dfrac{a_n}{b_n} \to s$ per $n \to +\infty$, dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{b_0 + b_1 + \ldots + b_n} = s.$$

∘∘ **3.18** – Sia $\{p_n\}$, $p_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ e $P_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$, $P_n \to +\infty$ e $\dfrac{p_n}{P_n} \to 0$ per $n \to +\infty$.
Dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{P_i}}{\ln\, P_n} = 1$$

(Generalizzazione della formula di Eulero–Mascheroni).

# Capitolo IV
# SERIE NUMERICHE

## § 1 – Determinazione del carattere di serie numeriche.

**1.1** – Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ converge se e solo se $a_n \to a$, inoltre $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - a$.

**1.2** – Calcolare la somma delle seguenti serie convergenti:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (serie di Mengoli),

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n(n-1)} - 1\right)$.

**1.3** – Calcolare la somma della seguente serie convergente;

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{1}{m^2 - n^2} \qquad (m \in \mathbb{N} - \{0\}).$$

**1.4** – Determinare la somma della seguente serie convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right).$$

**1.5** – Calcolare la somma della seguente serie convergente:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

**1.6** – Posto

$$s_n = (-1)^n \ln \frac{n+1}{n} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

scrivere il termine generale della serie avente $s_n$ come somma parziale n–esima.

**1.7** – Discutere il carattere e, ove possibile, determinare la somma della serie (geometrica) $\sum_{n=0}^{\infty} a\, q^n$, al variare di $q$ in $\mathbb{C}$.

**1.8** – Dimostrare che

$$0 < \sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n} < \pi.$$

**1.9** – Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge per $s \geq 2$,
diverge per $s \leq 1$.

**1.10** – Stabilire il carattere di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}.$$

**1.11** – Studiare il carattere di $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$, ove:



1) $u_n = \left(e^{1/n} + \frac{1}{n}\right)^n$; 2) $u_n = \frac{1}{n^2 - a}$, $a \in \mathbb{R}$;

3) $u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$; 4) $u_n = \frac{n^k + a}{n^k - b}$, $a, b \in \mathbb{R}, k > 0$;

5) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; 6) $u_n = \frac{n + \ln n}{(n - \ln n)^3}$;

7) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$; 8) $u_n = \frac{n + \ln n}{\sqrt[3]{n}}$;

9) $u_n = e^{-n^2 x}$; 10) $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2$;

11) $u_n = n^2 e^{-\sqrt[3]{n}}$; 12) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$.

∘ **1.12** – Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, converge per $s > 1$.

**1.13** – Sia $a_0 > 0$ e $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n}$. Mostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente.

**1.14** – Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, convergente.

Dimostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^s$, $s \geq 1$ è convergente.

**1.15** – È vero che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, esiste $s_o$ tale che per $s \geq s_o$ $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^s$ è convergente?

∘ **1.16** – Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$$

in dipendenza di $p, q, \in \mathbb{R}$.

∘∘ **1.17** – Sia $\{ a_n \}$, $a_n \geq 0$, una successione monotona non crescente, sia $k$ un intero maggiore di 1. Allora le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} k^n a_{k^n}$$

hanno lo stesso carattere (Criterio di condensazione di Cauchy).

**1.18** – Studiare il carattere di $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ ove:

1) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3 - n}}$; 2) $u_n = \dfrac{\ln \ln n}{n \ln^2 n}$;

3) $u_n = \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\ln n}$; 4) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\ln^3 n}$ .

**1.19** – Studiare il carattere di $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ ove:

1) $u_n = \dfrac{n^k}{n!}$; 2) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

3) $u_n = n^{-\sqrt[3]{n}}$; 4) $u_n = \left(\dfrac{\ln \ln n}{\ln n}\right)^n$;

5) $u_n = \dfrac{e^n \cdot n!}{n^n}$; 6) $u_n = \left(\arcsin \dfrac{1}{n}\right)^n$.

**1.20** – Studiare il carattere di $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ ove:

1) $u_n = \sqrt{n} \ln\left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2+2}\right)$;

2) $u_n = 1 + e^{1/n} - 2e^{1/2n}$;

3) $u_n = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n} + \ln n}$;





4) $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^n$;

5) $u_n = n^{-\frac{n+1}{n}}$;

6) $u_n = \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

7) $u_n = \left\{ \left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^{1/n} - 1 \right\} \left(e^{1/\ln n} - 1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

8) $u_n = \dfrac{n^n \left(1 - \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{n! \left(2 + \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^n}$.

**1.21** – Studiare il carattere di $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n u_n$ ove:

1) $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$; 2) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$;

3) $u_n = \dfrac{\ln n}{\ln^2 n - 1}$; 4) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{n^2 (2n)!}$;

5) $u_n = \dfrac{\pi}{2} - \arctan n$;

6) $u_n = \dfrac{1}{n \ln^2 n}$ per $n$ pari, $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ per $n$ dispari.

∘ **1.22** – Stabilire il carattere di $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n u_n$ ove:

1) $u_n = \dfrac{1}{3n + (-1)^n n}$;

2) $u_n = \dfrac{1}{n + \cos n\pi}$;

3) $u_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.

**1.23 –** Sia

$$a_n \geq b_n \geq 0 \ (n = 1, 2, \ldots) \ \text{e} \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

convergente; mostrare con un esempio che in generale nulla si può dire di

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n.$$

∘∘ **1.24 –** Mostrare con un esempio che da

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n > 0$$

convergente e $b_n \sim a_n$, non segue in generale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$$

è convergente.

**1.25 –** Stabilire il carattere di $\sum_{n=n_o}^{\infty} u_n$ ove:

$$1) u_n = \sqrt{n^2 + \cos n\pi} - n;$$

$$2) u_n = \sin(\Theta^n), \quad |\Theta| < 1;$$

$$3) u_n = (-1)^{[n/10]} \frac{1}{n};$$

$$4) u_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{1}{n}}{n};$$

$$5) u_n = \frac{\sqrt{n} \cdot \cos n \cdot \sin \frac{1}{n}}{n-1}.$$

**1.26 –** Stabilire, in dipendenza del parametro reale $a$, il carattere



delle seguenti serie:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^n + 2^n}, \quad a \neq -2;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n - n!}{(an)^n - e^n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n(n \ln n)^a}, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\ln n - a) - \ln n!}{n^a \sqrt{n+1}}.$$

**1.27 –** Stabilire, in dipendenza dei parametri reali $a$ e $b$, il carattere delle seguenti serie:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^a};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin\left(a + \frac{b}{n}\right) \right\}^n, \qquad 0 \leq a < \frac{\pi}{2};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} (1^a + 2^a + \ldots + n^a) \cdot b^{-\ln n}, \qquad a, b > 0.$$

∘ **1.28 –** 1) Studiare la successione

$$\left\{ \sqrt{n^2 + a^2} - n \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \ a \in \mathbb{R}.$$

2) Tenendo presente il punto 1) stabilire il carattere di

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n^2 + a^2} \cdot \pi\right).$$

**1.29 –** Stabilire il carattere delle seguenti serie in $\mathbb{C}$:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}; \qquad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + i};$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$;

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(i\,n\,a)$, $a \in \mathbb{R}$.

**1.30** – Sia

$$a_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2a_n + 1}.$$

Mostrare che $\{a_{2k}\}$ è monotona decrescente e che $\{a_{2k+1}\}$ è monotona crescente.
Calcolare il limite di $\{a_n\}$.
Stabilire il carattere di $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - 2a_n)$.

## § 2 – Criteri, proprietà e operazioni sulle serie.

**2.1** – Mostrare che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

è convergente. Mostrare che la proposizione non è vera se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge solo semplicemente.

**2.2** – Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente e $a_n \geq a_{n+1} \ldots \geq 0$, allora $n \cdot a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Mostrare che il viceversa non è vero.

**2.3** – Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente e $\{b_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ monotona con $|b_n| < M$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$. Mostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ è convergente.



**2.4** – Mostrare che se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0,$$

è convergente, converge anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

∘ **2.5** – Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$, divergente; posto $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ mostrare che:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ è divergente;

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ è divergente;

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ è convergente.

Mostrare che nulla si puó dire della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n \cdot a_n}$.

**2.6** – Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ convergente; posto $r_m = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$, dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{r_n} \text{ è divergente} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} \text{ è convergente.}$$

**2.7** – Si considerino le tre serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n, (u_n \geq 0) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} v_n, (v_n \geq 0) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}\ ;$$

1) se le prime due convergono anche la terza converge.
2) se le prime due divergono la terza può convergere o divergere.

**2.8** – Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, a_n > 0$, convergente, mostrare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{a_n a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} \qquad \text{converge.}$$

**2.9** – Dimostrare che se le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \qquad \text{convergono,}$$

vale la seguente disuguaglianza

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right)^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2.$$

**2.10** – Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$,

posto $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + + \ldots + a_n)$

e $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

dimostrare che $B_n \sim a \ln n$ per $n \to +\infty$.

∘ **2.11** – Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

è a termini positivi e convergente. Considerando l'n–esima somma parziale della serie precedente, dimostrare che

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right) - \ln n \to c < +\infty \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

e che

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

∘ **2.12** – Dimostrare che $\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}\right) - \ln \ln n$ ammette limite finito



per $n \to +\infty$; dedurre che se $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ è

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} = \ln p.$$

∘∘ **2.13** – Dimostrare che se $0 < \alpha < 1$ allora

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \beta - \mu_n$$

ove $\beta$ è fissato,

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \le \beta \le \frac{1}{1-\alpha}, \qquad \text{e} \qquad \mu_n \to 0 \ \text{per} \ n \to +\infty.$$

Dimostrare che se $0 < \alpha < 1$ è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} = \beta(2^{1-\alpha} - 1).$$

**2.14** – Dimostrare che se almeno una delle due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \ a_n > 0, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \ b_n > 0,$$

è divergente, , la serie prodotto secondo Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k},$$

è divergente.

**2.15** – Sia

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{e} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}, \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \text{converge e} \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{non converge.}$$

**2.16** – Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge assolutamente per

ogni $z \in \mathbb{C}$. Posto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z)$ mostrare che:

1) $f(0) = 1$
2) $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$.

○ **2.17** – Dimostrare che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ per } x \in \mathbb{R}.$$

**2.18** – Posto

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

dimostrare che $\qquad 0 < e - s_n < \dfrac{1}{n!n}.$

○○ **2.19** – Dimostrare che $e$ è irrazionale.

**2.20** – Stabilire il carattere di ciascuna delle serie seguenti:

1) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ ;

2) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ ;

3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$ .

○ **2.21** – Permutando i termini della serie

$$S_{1,1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots = 1 - \ln 2$$

si ottengono la serie

$$S_{p,q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2p} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{2q+1} + \frac{1}{2p+2} + \ldots$$

nelle quali si alternano blocchi di $p$ termini positivi con blocch di $q$ termini negativi. Mostrare che

$$S_{p,q} - S_{1,1} = \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$



○ **2.22** – Siano divergenti ambedue le serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} p_h \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} q_k$$

rispettivamente costituite dai termini $p_h$ non negativi e dai valori assoluti $q_k$ dei termini negativi di $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
Se $u_n \to 0$ per $n \to +\infty$ si possono permutare i termini di $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ in modo che la serie ottenuta $\sum_{m=1}^{\infty} v_m$ sia convergente ad un qualunque valore prefissato.
(Teorema di Dini).

## § 3 – Altri criteri. Metodi di sommazione Somme infinite. Prodotti infiniti.

**3.1** – Date le successioni
$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, e $A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$,
se $|A_n| < k$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$
e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1} - b_n|$ converge, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge e vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n (b_{n+1} - b_n).$$

**3.2** – Mostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(i\,n\,t)}{n}$$

converge se e solo se

$$t \neq 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots$$

**3.3** – Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ convergono le seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n x}{\sqrt{n}}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n x}{\ln n}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\cos n x) \cdot \sin \frac{x}{n}$.

∘ **3.4** – Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ una serie a termini reali positivi.

1) Se esistono $n_\circ \in \mathbb{N}$ e $k > 1$ tali che per $n \geq n_\circ$ sia

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq k, \text{ la serie } \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ converge.}$$

2) Se esiste $n_\circ \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq n_\circ$ sia

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1, \text{ la serie } \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ diverge.}$$

∘ **3.5** – Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ una serie a termini reali positivi;

se $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ ammette limite per $n \to +\infty$

e se $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \gamma$, allora

a) se $\gamma > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge;

b) se $\gamma < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

(Criterio di Raabe e Duhamel).

∘ **3.6** – Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ una serie a termini reali positivi;

se per $n \geq n_\circ$ $\quad n\left\{n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right\} < H$,

(oppure se esiste finito $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right\}$ ),



la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ è divergente.

∘ **3.7** – Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ una serie a termini reali positivi; se

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_\circ n^r + a_1 n^{r-1} + \ldots + a_r}{b_\circ n^s + b_1 n^{s-1} + \ldots + b_s}$$

$(r \geq 0, s \geq 0, a_\circ > 0, b_\circ > 0)$,

allora il carattere della serie è, nei vari casi, il seguente:

$$\left.\begin{array}{lll} s > r, & & \\ s = r, & a_\circ < b_\circ, & \\ s = r, & a_\circ = b_\circ, & a_\circ + a_1 < b_1 \end{array}\right\} \text{ convergente}$$

$$\left.\begin{array}{lll} s = r, & a_\circ = b_\circ, & a_\circ + a_1 \geq b_1 \\ s = r, & a_\circ > b_\circ, & \\ s < r, & & \end{array}\right\} \text{ divergente.}$$

(Criterio di Gauss).

**3.8** – Stabilire, in dipendenza di $x \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{x^n}{n}.$$

**3.9** – Stabilire, in dipendenza dei parametri che vi figurano, il carattere delle seguenti serie:

1) $\displaystyle 1 + \frac{a}{1} + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots \quad (a > 0)$;

2) $\displaystyle 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} + \ldots \quad (a, b, c > 0)$.

∘ **3.10** – Siano $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ interi, $0 < t_1 < t_2 \ldots$.
La serie $a_{t_1} + a_{t_2} + a_{t_3} + \ldots + a_{t_n} + \ldots$ si dice *sottoserie* della serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$.

Dalla serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, togliere tutti i termini che contengono la cifra 9 nella rappresentazione decimale del denominatore.

Mostrare che la sottoserie rimanente è convergente.

**3.11** – Dimostrare che se tutte le sottoserie di una serie sono convergenti, allora la serie è assolutamente convergente.

∘∘ **3.12** – Si consideri la matrice infinita:

$$\begin{matrix} p_{00}, & p_{01}, & p_{02}, & \dots \\ p_{10}, & p_{11}, & p_{012}, & \dots \\ p_{20}, & p_{21}, & p_{022}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Supponiamo che tutti i numeri $p_{nh}$ siano non–negativi e che

$$\sum_{h=0}^{\infty} p_{nh} = 1 \text{ per } n = 0, 1, 2, \dots.$$

Sia $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ una successione limitata.
Si definisca la nuova successione $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ ponendo

$$t_n = \sum_{h=0}^{\infty} p_{nh} s_h.$$

a) Mostrare che $\inf_n s_n \leq t_n \leq \sup_n s_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$.
b) Mostrare che $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ implica $\lim_{n\to+\infty} t_n = s$ se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} p_{nh} = 0 \text{ per ogni } h.$$

**3.13** – Si consideri la serie a termini reali $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; posto

$A_n = a_0 + a_1 + \dots a_n$ e

$H_n^1 = \dfrac{A_0 + A_1 + \dots + A_n}{n+1}$, $H_n^k = \dfrac{H_o^{k-1} + \dots + H_n^{k-1}}{n+1}$ per $k = 0, 1, 2, \dots$;

si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è $(H, k)$ sommabile e con la somma $A(H, k)$ se $H_n^k \to A$ per $n \to +\infty$.

($A(H, k)$ somma di Hölder di ordine $k$).

Dimostrare che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A(H; k)$, dove $k \geq 0$, e $k' > k$,



allora $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A(H; k')$.

**3.14** – Dimostrare che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A(H; k)$, allora $A_n = o(n^k)$ e $a_n = o(n^k)$.

∘∘ **3.15** – Si consideri la serie a termini reali $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; posto

$A_n^o = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $A_n^k = A_0^{k-1} + \dots + A_n^{k-1}$,

$E_n^k = \binom{n+k}{k}$ ($E_n^k$ eguale as $A_n^k$ quando $a_0 = 1, a_n = 0$ per $n > 0$)

$k = 0, 1, 2, \dots$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice $(C, k)$ sommabile (sommabile di ordine $k$ secondo Cesaro) alla somma $A$ se $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{E_n^k} \to A$ per $n \to +\infty$.

a) Mostrare che $A_n^k = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n-r+k}{k} a_r$.

b) Mostrare che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A(C, k)$, dove $k \leq 0$, e $k' > k$,

allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A(C, k')$.

**3.16** – Sia $\Omega$ un insieme ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Sia $\mathcal{P}^*(\Omega)$ l'insieme delle parti finite di $\Omega$.

Per ogni $\Gamma \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ sia $s_\Gamma = \sum_{j\in\Gamma} f(j)$.

Si dice che $f$ è *sommabile* su $\Omega$ e che $s$ è la sua somma, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{\Gamma} \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ tale che per ogni $\Gamma \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ con $\Gamma \supset \overline{\Gamma}$ si ha:

$$\left|s_\Gamma - s\right| = \left|\sum_{j\in\Gamma} f(j) - s\right| < \varepsilon.$$

In tal caso si scriverà $s = \sum_{j\in\Omega} f(j)$.

Mostrare che se $f$ non è negativa e sommabile su $\Omega$, allora il sottoinsieme $\Omega^+$ di $\Omega$ dove $f(j) > 0$ è al più numerabile.

**3.17 –** Sia $\Omega$ un insieme e $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$, $f$ è sommabile su $\Omega$ se e solo se è finito

$$\sup_{\Gamma \in \mathcal{P}^*(\Omega)} \sum_{j \in \Gamma} f(j).$$

**3.18 –** Mostrare che

$$f(n,m) = \frac{1}{(n!)^m}$$

è sommabile su $\mathbb{N}' \times \mathbb{N}'$. $(\mathbb{N}' = \mathbb{N} - \{0\})$.

∘ **3.19 –** Studiare, al variare del parametro reale $\alpha$, la sommabilità di

$$f(n,m) = \frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha} \qquad \text{su} \qquad (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) - \{(0,0)\}.$$

**3.20 –** Sia $\Omega$ un insieme e $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Siano $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = \max(-f, 0)$ (è quindi $f = f^+ - f^-$).
Condizione necessaria e sufficiente affinchè $f$ sia sommabile su $\Omega$ è che lo siano sia $f^+$ che $f^-$.
(Ne segue quindi che $f$ è sommabile se e solo se lo è $|f|$).

**3.21 –** Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ ; $f$ è sommabile su $\mathbb{N}$ se e solo se converge la serie di termine generale $f(n)$ e le due somme coincidono.

**3.22 –** Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ; $f$ è sommabile su $\mathbb{N}$ se e solo se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$.

In tal caso la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ e la somma infinita hanno la stessa somma.

∘ **3.23 –** Sia $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}^+$ sommabile, allora è

$$\sum_{\mathbb{N}^2} f(n,m) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(n,m).$$

(Un'analoga uguaglianza vale anche se $f$ prende valori in $\mathbb{R}$).



**3.24 –** Data la successione $\{u_n\}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$, si consideri la successione $t_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$, se $t_n \to t$ per $n \to +\infty$ si pone $t = \prod_{n=0}^{\infty} u_n$ e si dice che il prodotto infinito $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ è convergente.

Mostrare che se $\prod_{n=0}^{\infty} u_n = t \neq 0$ è $u_n \to 1$ per $n \to +\infty$.

**3.25 –** Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinchè il prodotto infinito $\Pi_{n=0}^{\infty} u_n$, $u \neq 0$, si convergente e non nullo è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $\overline{n} = \overline{n}(\varepsilon)$ tale che per $n \geq \overline{n}$ e $p > 0$ intero sia

$$\left| u_{n+1} \cdot u_{n+2} \ldots u_{n+p} - 1 \right| < \varepsilon.$$

**3.26 –** Si consideri

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), a_n > 0 \qquad \text{per} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

$P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$ converge
se e solo se
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente.

**3.27 –** Mostrare che se $u_1, u_2, \ldots, u_N$ sono numeri complessi, e se

$$p_N = \prod_{n=1}^{N} (1 + u_n), \qquad p_N^* = \prod_{n=1}^{N} (1 + |u_n|)$$

allora $p_N^* \leq e^{(|u_1| + \ldots |u_N|)}$, e $|p_N - 1| \leq p_N^* - 1$

**3.28 –** Il prodotto infinito $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ si dice assolutamente convergente se è convergente il prodotto $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + |a_n|)$.

Mostrare che se un prodotto infinito a fattori tutti diversi da 0 è assolutamente convergente allora è convergente e non nullo.

Capitolo V

# SPAZI METRICI E TOPOLOGICI

## § 1 – Spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$. Spazi vettoriali normati.

**1.1** – Dimostrare che per ogni coppia di punti $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ vale l'identità

$$2 \| \underline{x} \|^2 + 2 \| \underline{y} \|^2 = \| \underline{x} - \underline{y} \|^2 + \| \underline{x} + \underline{y} \|^2 .$$

(*Identità del parellelogramma*).

$$\left( \underline{x} = (x_1, x_2, \dots x_n), \ \| \underline{x} \| = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i \right)^{1/2} \right) .$$

**1.2** – Costruire in $\mathbb{R}^3$ una successione $\{\underline{a}_n\}$ con $\underline{a}_n \to \infty$ per $n \to +\infty$ e tale che nessuna delle successioni delle componenti tenda all'infinito.

**1.3** – Ricordiamo che dati

$$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^k, \quad \underline{x} = (x_1, \dots, x_k), \quad \underline{y} = (y_1, \dots, y_k),$$

si definisce il loro *prodotto interno* $(\underline{x}|\underline{y})$ nel modo seguente:

$$(\underline{x}|\underline{y}) = \sum_{i=1}^{k} x_i \overline{y}_i .$$

Costruire in $\mathbb{C}^2$ due successioni $\{\underline{x}_n\}$, $\{\underline{y}_n\}$ tali che $(\underline{x}_n|\underline{y}_n) \to 0$ per $n \to +\infty$ e $\underline{x}_n \not\to 0$, per $\underline{y}_n \not\to 0$ per $n \to +\infty$.

**1.4** – Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Un'applicazione $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+$ si dice *norma* su $V$ se

1) $\| x \| = 0$ se e solo se $x = 0$
2) $\| \delta x \| = |\delta| \cdot \| x \|$ per ogni $\delta \in \mathbb{C}$;
3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

La coppia $(V, \|\cdot\|)$ si dice *spazio vettoriale normato*.
Se $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n$, mostrare che:

1) le applicazioni $\underline{x} \to \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|, \underline{x} \to \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ sono norme.
2) $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leq \| \underline{x} \| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ ;
3) $\| \underline{x} \| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{n} \cdot \| \underline{x} \|$.

∘ **1.5** – Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Un'applicazione $(\cdot|\cdot): V \times V \to \mathbb{C}$ si dice ***prodotto interno*** su $V$ se:

1) $(x|x) \geq 0$ e $(x|x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $(x|y) = \overline{(y|x)}$;
3) $(\delta x|y) = \delta(x|y)$ per ogni $\delta \in \mathbb{C}$;
4) $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$.

La coppia $(V, (\cdot|\cdot))$ si dice *spazio vettoriale con prodotto interno*.

Mostrare che su ogni spazio $V$ con prodotto interno si ha:

$$\left|(x|y)\right|^2 \leq (x|x) \cdot (y|y)$$

(Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz)

e che l'applicazione che ad $x$ associa $(x|x)^{1/2}$ è una norma su $V$ (tale norma si dice indotta dal prodotto interno).

**1.6** – Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato.
Mostrare che se la norma è indotta da un prodotto interno (vedi V.1.5), per ogni $x, y \in V$ vale l'identità del parallelogramma

$$2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 = \| x - y \|^2 + \| x + y \|^2.$$



∘ **1.7** – Dimostrare che le due norme

$$\| \underline{x} \|_\circ = \max_{i=1,\ldots,n} |x_1|, \qquad \| \underline{x} \|^\circ = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

non provengono da un prodotto intero.

**1.8** – Sia $X$ un insieme e $x \in X$. Una famiglia $F_x$ di sottoinsiemi di $X$ si dice *base di intorni* di $x$ se valgono le seguenti proprietà:

1) per ogni $U \in F_x$ è $x \in U$;
2) se $U, V \in F_x$, esiste $W \in F_x$ con $W \subset U \cap V$;
3) per ogni $U \in F_x$ esiste $V \in F_x$ tale che per ogni $y \in V$, esiste $W \in F_y$ con $W \subset U$.

Si dice che $U$ è un *intorno* di $x$ se esiste $V \in F_x$ con $V \subset U$.
Se ad ogni $x \in X$ è associata una base di intorni, diremo che su $X$ è data una *topologia* $\tau$ e la coppia $(X, \tau)$ è detta *spazio topologico*.
Due topologie $\tau_1$ e $\tau_2$ su $X$ si diranno uguali se subordinano gli stessi intorni.
Dimostrare che se $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale normato, la famiglia di insiemi

$$U(x; \alpha) = \left\{ y \in V : \| x - y \| < \alpha \right\}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

costituisce una base di intorni di $x$ in $V$.

*Nota:* In generale, salvo esplicita avvertenza, uno spazio normato viene considerato topologico con la topologia sopra descritta.

**1.9** – Due norme $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$ su uno spazio vettoriale $V$ si dicono equivalenti se esistono $h, k > 0$ tali che per ogni $x \in V$ sia

$$h \| x \|_A \leq \| x \|_B \leq k \| x \|_A .$$

Dimostrare che due norme equivalenti in $V$ definiscono la stessa topologia.
In VII.3.13 dimostreremo che in $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ tutte le norme sono equivalenti.

**1.10** – Stabilire per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, se sono aperti, chiusi, connessi, convessi, compatti.

1) $\{\underline{x} : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$;
2) $\{\underline{x} : 2 \leq \| \underline{x} \| < 3\}$;
3) $\{\underline{x} : \underline{x} = \gamma \underline{a} + (1-\gamma)\underline{b}, \quad 0 < \gamma < 1\}$;
4) $\{\underline{x} : (\underline{x}|\underline{a}) = 0\}$;
5) $\{\underline{x} : (\underline{x}|\underline{a}) = 0\} - \{0\}$;
6) $\{\underline{x} : (\underline{x}|\underline{a}) = 0\} \cup \{\underline{x} : (\underline{x}|\underline{a}) = 1\}$;

**1.11** – L'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ a coordinate razionali è aperto, chiuso, compatto, convesso?

**1.12** – Sia $T \subset \mathbb{R}$, $T \neq \emptyset$, $T$ limitato; allora $\sup T \in T$ oppure $\sup T$ è di accumulazione per $T$.

**1.13** – Dimostrare che ogni sottoinsieme aperto $A$ di $\mathbb{R}$ si puó rappresentare come unione di una famiglia finita o numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti.

**1.14** – Dare un esempio di copertura aperta dell'intervallo $(0,1)$ che non ha una sottocopertura finita.

**1.15** – Dato un segmento chiuso $T$ in $\mathbb{R}^2$ e un aperto $A$ che lo contiene, dimostrare che esiste un rettangolo aperto $S$ con $T \subset S \subset A$.

∘ **1.16** – Determinare tutti i punti di accumulazione del sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito:

$$\left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ m \neq 0,\ n \neq 0 \right\}.$$

∘ **1.17** – Siano $\alpha, \beta$ reali positivi tali che $\frac{\alpha}{\beta}$ sia irrazionale; dimostrare che l'insieme:

$$\{ m\alpha + n\beta : m \in \mathbb{Z},\ \ n \in \mathbb{Z} \}$$

è denso in $\mathbb{R}$.



**1.18** – Costruire un compatto in $\mathbb{R}$ con una infinità numerabile di punti di accumulazione.

**1.19** – Sia $\{F_n\}$ una successione di chiusi non vuoti di $\mathbb{R}^n$, con $F_{n+1} \subset F_n$; mostrare che se uno degli $F_n$ è limitato allora $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

∘ **1.20** – Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega$ aperto; dimostrare che esiste una successione $\{K_h\}$ di compatti con $K_h \subset K^o_{h+1}$ e $\bigcup_h K_h = \Omega$.

**1.21** – Data la successione $\{C_n\}$ di convessi di $\mathbb{R}^n$ con $C_n \subset C_{n+1}$, mostrare che $C = \bigcup_n C_n$ è convesso.

**1.22** – Mostrare che l'intersezione di due convessi di $\mathbb{R}^n$ è convessa, mentre l'unione può non essere convessa.

**1.23** – Mostrare che $\mathbb{R}^n$ è connesso.

**1.24** – Dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ gli unici insiemi aperti e chiusi simultaneamente sono $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$.

∘∘ **1.25** – Si consideri in $\mathbb{R}$ l'insieme $C$ dei numeri della forma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k}$ ove $c_k$ assume solo i valori 0 o 2 (insieme di Cantor); mostrare che $C$ è chiuso.

∘∘ **1.26** – Mostrare che l'insieme di Cantor può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $[0,1]$.

∘ **1.27** – Mostrare che l'insieme $C$ di Cantor è perfetto.

## § 2 – Spazi metrici e spazi topologici.

**2.1** – Sia $X$ un insieme; una *metrica* $d$ su $X$ è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ con le seguenti proprietà:

$\alpha$) $d(x,y) = d(y,x)$;

$\beta$) $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;

$\gamma$) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

La coppia $(X,d)$ viene detta *spazio metrico*.
Per ogni $x \in X$ si consideri la famiglia di insiemi

$$\mathcal{U}(x,\alpha) = \{y : y \in X,\ d(x,y) < \alpha\},\ \alpha \in \mathbb{R}^+ - \{0\}.$$

Mostrare che $\mathcal{U}(x,\alpha)$ costituisce una base di intorni di $x$ in $X$ (Si veda V.1.8).
La topologia definita da queste basi di intorni per ogni $x \in X$ è detta *topologia indotta dalla metrica* $d$.

*Nota:* In generale, salvo esplicita avvertenza, uno spazio metrico viene considerato topologico con la topologia indotta dalla metrica.

**2.2** – Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato.
Mostrare che ponendo $d(x,y) = \| x - y \|$ si ottiene una metrica su $V$ (tale metrica si dice indotta dalla norma).

*Nota:* In generale, salvo esplicita avvertenza, uno spazio normato viene considerato con la metrica indotta.

**2.3** – Siano $\rho$ e $\sigma$ due metriche equivalenti in un insieme $X$, cioè esistono $h, k > 0$ tali che $h\rho(x,y) \leq \sigma(x,y) \leq k\rho(x,y)$ per ogni $x, y \in X$;
1) provare che $\rho$ e $\sigma$ determinano la stessa topologia;



2) Se $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in $(X;\rho)$ allora è di Cauchy anche in $(X;\sigma)$.
(Ricordiamo che una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico $(X,d)$, si dice di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu$ tale che se $n, m \geq \nu$ è $d(x_n, x_m) < \varepsilon$).

**2.4** – Sia $\rho$ una metrica non limitata in $X$; posto
$\sigma(x,y) = \min\left[\rho(x,y); 1\right]$, mostrare che:

1) $\sigma$ è una metrica in $X$;
2) $\sigma$ e $\rho$ non sono equivalenti;
3) $\sigma$ e $\rho$ subordinato su $X$ la stessa topologia;
4) una successione è di Cauchy in $(X;\rho)$ se e solo se lo è in $(X;\sigma)$.

**2.5** – Sia $(X;d)$ uno spazio metrico, si definisce scarto tra due insiemi $A,\ B \subset X$

$$s(A,B) = \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} (d(x,y)).$$

Mostrare con un esempio che vi sono insiemi $A$ e $B$ chiusi e disgiunti con $s(A,B) = 0$.

**2.6** – Mostrare che lo scarto non è una metrica sull'insieme delle parti di $X$.

**2.7** – In un insieme $X$ sia:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = y \\ 1 & \text{se} \quad x \neq y \end{cases}$$

mostrare che $d$ è una metrica su $X$ (*metrica discreta*).

**2.8** – Sia $(X,d)$ uno spazio con la metrica discreta (vedi V.2.7.).
Mostrare che :

1) ogni punto di $X$ è isolato;
2) ogni sottoinsieme di $X$ è sia aperto che chiuso;
3) un sottoinsieme di $X$ è compatto se e solo se è finito;

4) ogni sottoinsieme di $X$ è limitato;

5) un sottoinsieme di $X$ è connesso se e solo se è costituito da un solo punto;

6) una successione in $X$ è convergente se e solo se è definitivamente costante;

7) $X$ è completo.

**2.9** – Si consideri $\mathbb{Q}$ con la metrica $d(p,q) = |p-q|$; mostrare che l'insieme

$$E = \{\ p : p \in \mathbb{Q},\ 3 < p^2 < 5\ \}$$

è chiuso, limitato, non compatto.

**2.10** – Sia $X$ uno spazio metrico, $A, B \subset X$; mostrare che se $A$ è aperto allora $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
Dare un esempio di insiemi $A$ e $B$ tali che $A$ non è aperto e non valga la precedente inclusione.

**2.11** – Mostrare che se un sottoinsieme $A$ di uno spazio metrico $X$ non ha punti isolati, anche $\overline{A}$ non ha punti isolati.

**2.12** – Mostrare che se $A$ è un sottoinsieme di uno spazio metrico $X$, tale che $A$ e $A^c$ sono densi in $X$, allora $X$ non possiede punti isolati.

**2.13** – Uno spazio metrico $X$ si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme numerabile denso in $X$.
Mostrare che $\mathbb{R}^n$ è separabile.

∘ **2.14** – Sia $X$ uno spazio metrico, dimostrare che se ogni sottoinsieme infinito di $X$ ha un punto di accumulazione allora $X$ è separabile.

∘ **2.15** – Dimostrare che in ogni spazio metrico separabile $X$ esiste una famiglia numerabile $\mathcal{V}$ di sottoinsiemi aperti di $X$ tale che per ogni $x \in X$ la famiglia

$$U_x = \left\{ V : V \in \mathcal{V},\ x \in V \right\}$$

è una base di intorni di $x$.



∘∘ **2.16** – Mostrare che se $X$ è metrico separabile allora da ogni copertura aperta si può estrarre una sottocopertura numerabile. (Teorema di Lindelöf).

**2.17** – Sia $X$ uno spazio metrico compatto, allora ogni insieme infinito ha un punto di accumulazione.

**2.18** – Dimostrare che ogni spazio metrico compatto è completo.

∘ **2.19** – Sia $X$ uno spazio metrico, dimostrare che se ogni sottoinsieme infinito di $X$ ha un punto di accumulazione, allora $X$ è compatto.

**2.20** – Siano $(X, d_1)$ e $(Y, d_2)$ due spazi metrici.
Definiamo su $(X \times Y) \times (X \times Y)$ la seguente funzione

$$d\Big( (x_1, y_1), (x_2, y_2) \Big) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2).$$

Mostrare che $d$ è una metrica su $X \times Y$.

**2.21** – Uno spazio topologico $(X, \tau)$ si dice di Hausdorff se per ogni coppia $x, y \in X$ esistono un intorno $U$ di $x$ e $V$ di $y$ con $U \cap V = \emptyset$.
In $\mathbb{R}^2$ si consideri la famiglia dei dischi $D(\underline{0}, \alpha) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{x}\| < \alpha\}$; dimostrare che tale famiglia è una topologia in $\mathbb{R}^2$ non di Hausdorff.

∘ **2.22** – Si consideri l'insieme $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, per ogni $x \in \mathbb{C}$ è data la base di intorni

$$\mathcal{U}(x : \alpha) = \{y : y \in \mathbb{C}, |y - x| < \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

al punto $\infty$ si associa la base di intorni

$$\mathcal{U}(\infty; \alpha) = \{y : y \in \mathbb{C}, |y| > \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Mostrare che con la topologia così definita lo spazio $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è compatto.

**2.23 –** Siano $X$ e $Y$ due spazi topologici ed $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due basi di intorni per le topologie rispettivamente di $X$ e $Y$.
Mostrare che la famiglia

$$\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{U \times V : U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V}\}$$

costituisce una base di intorni su $X \times Y$. (La topologia che viene così definita è detta topologia prodotto).

Capitolo VI

# FUNZIONI. LIMITI DI FUNZIONI

## § 1 – Prime proprietà delle funzioni.

**1.1 –** Determinare dominio e codominio delle seguenti funzioni di più variabili reali:

1) $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$;
2) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$;
3) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
4) $f(x,y,z) = e^{-y}\sqrt{x(2-x)}$.

**1.2 –** Determinare il dominio delle seguenti funzioni di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$

1) $f(x,y) = (\ln(1-x^2-y^2), \sqrt{x})$;
2) $f(x,y) = \left( e^{\frac{1}{\sqrt{x-y}}}, \sqrt{x^2-y^2-1} \right)$.

**1.3 –** Data $f(t) = t^3+1$, $t \in \mathbb{R}$, scrivere l'espressione analitica di

$$f(t^2) \quad , \quad \left\{ f(t) \right\}^2 \quad \text{e} \quad f\left\{ f(t) \right\}.$$

**1.4 –** Siano $f(t) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$; dare l'espressione analitica di $f \circ g$ e $g \circ f$.

**1.5 –** Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definite:

$$f(x) = x^2+1, \qquad g(x) = \sqrt{x-1}.$$

1) Determinare i domini di $f, g, f \circ g, g \circ f$.

2) Verificare che su $E = \{x : x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$ le funzioni $f$ e $g$ sono una inversa dell'altra.

**1.6 –** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile. Detta $g$ la sua inversa, come si caratterizza il grafico di $g$ mediante quello di $f$? Qual'è la caratteristica del grafico di una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ invertibile e uguale alla sua inversa?

**1.7 –** Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow J$ suriettiva e strettamente monotona. Allora $f$ è invertibile.

**1.8 –** Sia $f$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{per} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Mostrare che $f$ non è monotona in alcun intervallo , che è invertibile e $(f \circ f)(x) = x$, cioè $f^{-1}$ ha la stessa forma di $f$.

**1.9 –** Sia $f : I \to I,\ I \subset \mathbb{R}$, indichiamo con $f^{[1]}(x) = f(x)$ e con $f^{[n]}(x) = f \circ f^{[n-1]}(x)$. $f^{[n]}$ si chiama iterata n–esima di $f$.
Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{x}{2}, & \text{per} \quad 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{per} \quad x > 2 \end{cases},$$

scrivere l'espressione analitica di $f^{[n]}(x)$.

**1.10 –** Siano $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \tan x$.
Dove sono entrambe definite, tracciare il diagramma di $h(x) = \max\big(f(x), g(x)\big)$.

**1.11 –** Sia $f$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{per} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Mostrare che

$$\sup_{x \leq u} f(x) = \begin{cases} u & \text{per} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad u < 0 \end{cases}.$$



**1.12 –** Sia $f$ così definita:

$$f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

1) Determinare il dominio di $f$;

2) Dare un'espressione analitica di $f_1$ ed $f_2$, restrizioni di $f$ rispettivamente a $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ ed $\mathbb{R}^- - \{0\}$.

**1.13 –** Sia $g(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$.

1) Mostrare che la restrizione di $g$ ad $E = \left\{x : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$ ammette inversa;

2) Posto $g(-\frac{1}{2}) = 1$, mostrare che il prolungamento $\hat{g}$ di $g$ così definito è biiettivo da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$.

**1.14 –** Sia $f$ la funzione definita sugli intervalli

$$I_1 = (-\infty, -1),\ I_2 = (-1, 1),\ I_3 = (1, +\infty)$$

dalla formula $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

1) Mostrare che $f$ è strettamente crescente su ciascuno degli intervalli.

2) Mostrare che su ciascuno degli intervalli $f$ ammette funzione inversa.

3) Determinare le soluzioni dell'equazione $\theta = \frac{1}{2}\arcsin(f(\tan\theta))$

**∘ 1.15 –** Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ così definita:

$$f(x, y) = (ax + by,\ cx + dy),\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Determinare per quali valori di $a, b, c, d$ la funzione $f$ è iniettiva e per quali valori è suriettiva.

**1.16 –** Considerate le funzioni $f, g : E \to \mathbb{R}^+,\ E \subset \mathbb{R}^n$, mostrare che:

$$\frac{\inf_E f(\underline{x})}{\sup_E g(\underline{x})} \leq \inf_E \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} \leq \sup_E \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} \leq \frac{\sup_E f(\underline{x})}{\inf_E g(\underline{x})}.$$

**1.17** – Dire per ciascuna delle seguenti funzioni se è pari, dispari o né pari né dispari

1) $f(x) = x^4 - x^2 + x^3$ $\quad x \in \mathbb{R}$;
2) $f(x) = (x+1)^2(x-1)^2$ $\quad x \in [-1,1]$;
3) $f(x) = [x]$ $\quad x \in [-3,3]$;
4) $f(x) = \dfrac{\cos^3 x - 2\cos x}{\cos\, x + 2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$;
5) $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x \cdot \cos 3x$ $\quad x \in \mathbb{R}$ .

**1.18** – Rappresentare ciascuna delle seguenti funzioni come somma di una funzione pari e di una funzione dispari.

1) $f(x) = x^2 + 3x + 2$;
2) $f(x) = \sin 2x + \cos\frac{x}{2} + \tan x$;
3) $f(x) = \ln(1 + x^2 + x)$.

**1.19** – Stabilire se le seguenti funzioni sono, oppure no, periodiche; in caso affermativo determinare il periodo.

1) $f(x) = \sin^2 x - 1$; $\qquad$ 2) $f(x) = \dfrac{\tan\frac{x}{2}}{4 + \cos 2x}$;
3) $f(x) = 2x - [2x]$; $\qquad$ 4) $f(x) = x - \sin 2\pi x - [x]$;
5) $f(x) = x + \sin x - [x]$.

**1.20** – Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostrare che se esiste $\omega > 0$ tale che $f(x+\omega) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(x)$ è costante oppure è periodica di minimo periodo $T = \frac{\omega}{k}$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

**1.21** – Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se per ogni coppia di punti $x, y \in I$ e $0 \le \delta \le 1$ é

$$f(\delta x + (1-\delta)y) \le \delta f(x) + (1-\delta)f(y).$$

Dimostrare che se $f$ è convessa, per ogni $n$–pla $x_1, x_2, .., x_n \in I$ e $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ con $\delta_i \ge 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$ è

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i \in I \text{ e } f\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(x_i).$$



**1.22** – Esprimere come funzione algebrica di $a$ e $b$ l'espressione

$$\sin(\arccos a + 2\arctan b).$$

**1.23** – Mostrare che la disuguaglianza

$$\arccos x > 1 - x^2$$

è verificata per $-1 < x < 1$.

∘ **1.24** – Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona e *additiva*, cioè $f(x+y) = f(x) + f(y)$, allora $f(x) = xf(1)$.

∘∘ **1.25** – Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additiva e *moltiplicativa* cioè

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x) \cdot f(y),$$

allora o $\quad f(x) = 0$
oppure $\quad f(x) = x$ per ogni $x$.

∘ **1.26** – Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ additiva e moltiplicativa, mostrare allora che o

$f(z) = 0$ oppure $f(z) = z$, oppure $f(z) = \overline{z}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

**1.27** – Si dice funzione *aritmetica moltiplicativa* ogni funzione $f : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{C}$ tale che $f(1) = 1$ e $f(ab) = f(a)f(b)$ per ogni coppia $(a,b)$ di interi primi fra loro.
Mostrare che le seguenti funzioni sono aritmetiche moltiplicative:

1) $\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$; $p$ primo, numero degli interi $x$, $1 \le x \le n$, primi con $n$ (indicatore di Eulero–Gauss);
2) $\tau(n)$ = numero dei divisori di $n$;
3) $\sigma(n)$ = somma dei divisori di $n$;
4) $\sigma_\alpha(n)$ = somma delle potenze $\alpha$–esime dei divisori di $n$;
5) $\lambda(n) = (-1)^k$, $k$ numero dei fattori primi di $n$, ciascuno computato secondo il proprio esponente.

∘ **1.28** – Sia $f$ aritmetica moltiplicativa e per un $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ sia $f(k) \ne 0$
Mostrare che la funzione $g_k(n) = \dfrac{f(kn)}{f(k)}$ è aritmetica moltiplicativa
(Lehmer, Makowski).

## § 2 – Limiti di funzioni.

**2.1** – Determinare, qualora esistano, i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$ 2) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ 4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$ 6) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$

7) $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$ 8) $\lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln(\sin 2x))$

9) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{x+1}$ 10) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Sh} x}{x}$.

**2.2** – Determinare, qualora esistano, i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 2) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x}{\sin 3x}$ 4) $\lim_{x\to -2} \frac{\tan \pi x}{x+2}$

5) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$ 6) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x - x\cos x}$

7) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ 8) $\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e}$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{x}$; 10) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

11) $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} \arctan x$ 12) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\tan x - 1}$.

**2.3** – Determinare, qualora esistano, i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{(x^2+1)(x-2)}$ 2) $\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{(x^2+1)(x-2)}$

3) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{x^{-2}}$ 4) $\lim_{x\to 1} \arcsin \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}{x-1}$



5) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x-\ln x}$ 6) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]}$

7) $\lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \ln(1+x^2)$ 8) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

**2.4** – Determinare, qualora esistano, i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$

2) $\lim_{x\to +\infty} (\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x})$

3) $\lim_{x\to +\infty} x\left(\arctan \frac{x+1}{x+2} - \arctan \frac{x}{x+2}\right)$

4) $\lim_{x\to 0^+} \cot x \cdot \arccos x$

5) $\lim_{x\to a} \left(\frac{\tan a}{\tan x}\right)^{\tan^{-3}(x-a)}$ $, 0 < a < \pi,\ a \neq \frac{\pi}{2}$

6) $\lim_{x\to 0^-} (1-2^x)^{\sin x}$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)}{x^4}$.

**2.5** – Determinare, qualora esistano, i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$

2) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tan x}-1}{e^{\tan x}+1}$.

**2.6** – Determinare, qualora esistano, i limiti per $x \to 0^-, 0^+, 0$ di:

$$\frac{\sqrt{1-\cos x} - 3\sin x}{x}.$$

**2.7** – Determinare, qualora esistano, i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$

2) $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$

3) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$, $a,b>0$

4) $\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$, $a>0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\beta\neq 0$.

**2.8** – Determinare, qualora esistano, i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot e^{(1-x^2)\ln x}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln\left(1+\frac{x^2}{(1+x)\ln(1+x)}\right)}$

3) $\lim_{x\to +\infty}\left[\cos\left\{\left(1+(-1)^{[x]}\cdot\sin\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\right\}\right]$,

(Si intende parte intera di $\cos\{\ldots\}$).

**2.9** – Determinare per quali valori di $a,b,c$ è:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-2x^2+7x+1}-ax^2-bx-c\right)=0.$$

**2.10** – Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}-1}{x\ln(1+2x)},\ \sin\frac{1}{x^m},\quad m\in\mathbb{Z};$$

$$g(x)=\frac{(1-\cos x)\sin 2x}{x^2\sin 3x}.$$

Determinare, in dipendenza da $m$, quali delle relazioni $\sim, o, O, \asymp$ intercorrono fra $f$ e $g$ per $x\to 0$.



**2.11** – Mostrare che se $f(x)$ è limitata in un intorno di $+\infty$, allora $\ln(x+f(x))\sim\ln x$ per $x\to+\infty$.

**2.12** – Sia $f(x)>0$ ed esista $\delta>0$ tale che $|f(x)-1|\geq\delta$ in un intorno di $x_\circ$; se $f(x)\sim g(x)$ per $x\to x_\circ$ allora $\ln f(x)\sim\ln g(x)$ per $x\to x_\circ$.

**2.13** – Determinare la classe limite per $x\to+\infty$ di:

$$\frac{x}{1+x}\sin x.$$

∘ **2.14** – Determinare la classe limite per $x\to+\infty$ di:

$$\frac{\ln x}{\ln(1+|x\sin x|)}.$$

**2.15** – Sia $f(x)\to a>0$ per $x\to x_\circ$, $g(x)$ qualsiasi, mostrare che:

$$\limsup_{x\to x_\circ} f(x)g(x)=a\limsup_{x\to x_\circ} g(x).$$

∘ **2.16** – Sia $f(x)$ definita in un intorno di $+\infty$, limitata in ogni intervallo finito e $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Se $f(x+1)-f(x)\to a$ per $x\to+\infty$, allora $\frac{f(x)}{x}\to a$ per $x\to+\infty$.

∘ **2.17** – Posto:

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2(n!\pi x)}{\sin^2(n!\pi x)+t^2}\right)$$

dimostrare che:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{per } x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{per } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

(Funzione di Dirichlet).

∘∘ **2.18** – Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e sia $E\subset\mathbb{R}$ l'insieme dei punti $\xi$ di $\mathbb{R}$ in cui esiste $\lim_{x\to\xi}f(x)$ e tale limite è diverso da $f(\xi)$.
Dimostrare che $E$ è al più numerabile.

◦ **2.19** – Data la serie convergente $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $a_i \geq 0$, dimostrare che per $0 < x \leq 1$ la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{1/x}$ converge e che

$$\lim_{x \to 0^+} \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{1/x} \right)^x = \sup_i a_i = \max_i a_i.$$

**2.20** – Sia $\{t_n\}$ una successione monotona crescente di numeri reali positivi tale che $t_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$.
Si definisce *funzione enumeratrice* di $\{t_n\}$ la funzione $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N} - \{0\}$, definita da $A(x) = A(x; t_n) = \{$numero dei $t_n$ con $0 < t_n \leq x\}$.
Si dice *densità media* di $\{t_n\}$ su $[0, x)$ con il quoziente $\dfrac{A(x)}{x}$.

1) Mostrare che $\dfrac{A(x)}{x}$ è monotona decrescente nei tratti $[t_n, t_{n+1})$;

2) determinare $A(x)$ per le successioni $\{n^3\}$ e $\{\ln n\}$.

**2.21** – Siano $\{t_n\}$ e $\{v_k\}$ due successioni come in VI.2.20; denotiamo con $\{t_n\} \cup \{v_k\}$ e $\{t_n\} \cap \{v_k\}$ rispettivamente: la successione $\{w_s\}$ "unione" delle due $\{t_n\}$ e $\{v_k\}$ ottenuta ordinando in successione crescente l'insieme degli elementi delle due successioni (ogni elemento, se figurasse due o più volte, non viene ripetuto); la successione $\{u_j\}$ "intersezione" delle stesse successioni ottenuta ordinando in successione crescente l'insieme di tutti gli elementi ad esse comuni. Potrebbe essere $\{u_j\}$ vuota o anche sequenza finita.
Mostrare che

$$\frac{A(x; w_s)}{x} \leq \frac{A(x; t_n)}{x} + \frac{A(x; v_k)}{x} = \frac{A(x; w_s)}{x} + \frac{A(x; u_j)}{x}.$$

**2.22** – Data una successione $\{t_n\}$ come in VI.2.20,

$$\underline{D}(t_n) = \lim_{x \to +\infty} \inf \frac{A(x; t_n)}{x} \qquad \overline{D}(t_n) = \lim_{x \to +\infty} \sup \frac{A(x; t_n)}{x}$$

si dicono rispettivamente *densità asintotica inferiore* e *densità asintotica superiore* di $\{t_n\}$.
Se $\underline{D}(t_n) = \overline{D}(t_n) = D(t_n)$ si dice che $\{t_n\}$ ammette *densità asintotica*.



Mostrare che:
1) se a partire da un certo indice $n_o$ della prima e a partire da un certo indice $k_o$ della seconda di due successioni assegnate $\{t_n\}$ e $\{v_k\}$, queste coincidono (cioè se $t_{n_o+s} = v_{k_o+s}$, $s = 0, 1, 2, \dots$ ) allora:

$$\underline{D}(t_n) = \underline{D}(v_k), \qquad \overline{D}(t_n) = \overline{D}(v_k).$$

2) Data una successione $\{z_s\}$ con $D(z_s) = 0$ e $\{t_n\} \cup \{z_s\} = \{w_r\}$ allora $\underline{D}(t_n) = \underline{D}(w_r)$, e $\overline{D}(t_n) = \overline{D}(w_r)$.

**2.23** – Mostrare che

1) da $t_{n+1} - t_n \geq a, (n = 1, 2, \dots)$ segue $\overline{D}(t_n) \leq \dfrac{1}{a}$

2) da $t_{n+1} - t_n \leq b, (n = 1, 2, \dots)$ segue $\underline{D}(t_n) \geq \dfrac{1}{b}$

3) da $\liminf_{n \to +\infty} (t_{n+1} - t_n) \geq \alpha$ segue $\overline{D}(t_n) \leq \dfrac{1}{\alpha}$

4) da $\limsup_{n \to +\infty} (t_{n+1} - t_n) \leq \beta$ segue $\underline{D}(t_n) \geq \dfrac{1}{\beta}$

5) da $\lim_{n \to +\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0$ segue $D(t_n) = \infty$

6) da $\lim_{n \to +\infty} (t_{n+1} - t_n) = c$ segue $D(t_n) = \dfrac{1}{c}$

7) da $\lim_{n \to +\infty} (t_{n+1} - t_n) = \infty$ segue $D(t_n) = 0$

8) se $t_n \in \mathbb{N} (n = 1, 2, \dots)$ risulta $0 \leq \underline{D}(t_n) \leq \overline{D}(t_n) \leq 1$.

◦◦ **2.24** – Sia $\{t_n\}$ l'unione di $k$ progressioni aritmetiche del tipo $\{ah + l_s\}$, $h \in \mathbb{N}$, $s = 1, 2, \dots, k$, con $0 \leq l_1 < l_2 < \dots l_k < a$, $a, l_s \in \mathbb{N}$. Sia data inoltre una successione $\{p_r\}$ a termini positivi, monotona crescente, con $p_o = 0$.
Posti :

$$I = \bigcup_{m=0}^{\infty} [p_{2m}, p_{2m+1}), \quad J = \bigcup_{m=0}^{\infty} [p_{2m+1}, p_{2m+2}),$$

siano: $\{v_q\}$ la sottosuccessione di $\{t_n\}$ costituita dagli elementi appartenenti ad $I$; $A(x)$ e $A^o(x)$ le funzioni enumeratrici di $\{t_n\}$ e $\{v_q\}$ rispettivamente;

$c_r = p_{r+1} - p_r$; $R_m = c_0 + c_2 + \dots c_{2m}$,
$S_m = c_1 + c_3 + \dots + c_{2m+1}$.
Dimostrare che se $\dfrac{r}{p_r}$ e $\dfrac{c_r}{p_r}$ tendono a zero per $r \to \infty$, da

$$\frac{R_m}{S_m} \to \begin{cases} 0 \\ \gamma \\ +\infty \end{cases} \qquad \text{per } m \to +\infty$$

segue rispettivamente

$$D(v_q) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{k}{a} \cdot \dfrac{\gamma}{1+\gamma} \\ \dfrac{k}{a} \end{cases} .$$

## Capitolo VII

# CONTINUITÀ

## § 1 – Continuità delle funzioni

**1.1** – Usando la $(\varepsilon, \delta)$ definizione provare che:
1) $f(x) = 3x^2 + x - 5$ è continua in $x = 0$;
2) $f(x) = x^3 - 6x + 4$ è continua in $x = 1$;
3) $f(x) = \dfrac{x+7}{3x-2}$ è continua in $x = 0$.

**1.2** – Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

definita in $\mathbb{R} - \{1\}$, completarne la definizione in modo che risulti continua in $\mathbb{R}$.

**1.3** – Stabilire se le seguenti funzioni possono essere definite su tutto $\mathbb{R}$ in modo da risultare continue:

1) $\dfrac{x}{x^2 - 4}$ 2) $\dfrac{x}{\sin x}$

3) $\dfrac{\cos\left\{\frac{\pi}{2}x\right\}}{x^2(x-1)}$ 4) $\dfrac{\tan 3x}{\tan 6x}$

5) $\ln\ \ln(1 + x^2)$

**1.4** – Stabilire se le seguenti funzioni possono prolungarsi con continuità in $x = 0$;

1) $\dfrac{|x|}{x}$ 2) $\dfrac{1}{1+x+\dfrac{|x|}{x}}$ 3) $\sin\left\{\dfrac{\pi x}{|x|}\right\}$.

**1.5** – Mostrare che la funzione così definita

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{per} \quad x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{per} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

non è continua in alcun punto.

**1.6** – Discutere le continuità della funzione

$$f(x)=\sin\frac{1}{P(x)}$$

ove $P(x)$ è un polinomio.

**1.7** – Dimostrare che

$$f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$$

è continua e monotona crescente su $\mathbb{R}$.

**1.8** – Dimostrare che se $f(x)$ è continua in $x=a$ ed assume valori positivi e negativi in ogni intorno di $a$, allora $f(a)=0$.

**1.9** – Sia

$$f(x)=\begin{cases}-2\sin x & \text{per} \quad x\le-\dfrac{\pi}{2}\\ a\sin x+b & \text{per} \quad -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \quad (a,b\in\mathbb{R})\\ \cos x & \text{per} \quad x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Determinare $a$ e $b$ in modo che $f(x)$ sia continua.

**1.10** – Sia

$$f(x)=\begin{cases}x^a\cdot\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| & \text{per} \quad 0<x<1\\ 0 & \text{per} \quad x=0\\ |x|^b\cdot\arctan x & \text{per} \quad -1<x<0.\end{cases}$$



Determinare $a,b\in\mathbb{R}$ in modo che:

1) $f(x)$ sia continua in $-1<x<1$;
2) $f(x)$ sia uniformemente continua;
3) $f(x)$ sia puntualmente crescente in $x=0$.

**1.11** – Si considerino le seguenti funzioni:

1) $$f(x)=\begin{cases}0 & \text{per} \quad x\in\mathbb{Z}\\ x & \text{per} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}; \qquad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

2) $$g(x)=\begin{cases}0 & \text{per} \quad x=0\\ x & \text{per} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\\ \dfrac{1}{x} & \text{per} \quad x\in\mathbb{Q}-\{0\}\end{cases}; \qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

Studiare la iniettività, la suriettività e la continuità di $f(x)$ e $g(x)$.

∘∘ **1.12** – Studiare la iniettività, la suriettività e la continuità della seguente funzione:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{per } x\in\mathbb{R}^+-\mathbb{Q}^+\\ \dfrac{1}{q} & \text{per } x\in\mathbb{Q}^+-\{0\} \text{ con } x=\dfrac{p}{q};\ p,q \text{ primi fra loro;}\end{cases}$$

$f:\mathbb{R}^+-\{0\}\to\mathbb{R}^+$.

**1.13** – Studiare la continuità di

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

∘ **1.14** – Sia $f\in C([a,b])$ e $g(x)=\sup\limits_{a\le t\le x}f(t)$; mostrare che $g$ è continua.

**1.15** – Sia $f(x)$ continua e convessa in $[a,b]$; dove raggiunge il suo massimo?

**1.16** – Sia $f\in C(\mathbb{R})$ tale che $|f(x)|<|x|$ per ogni $x\neq0$.
Mostrare che:
1) $f(0)=0$;
2) per ogni coppia $\varepsilon,M$ tali che $0<\varepsilon<M$ esiste $k$ con $0<k<1$ tale che $|f(x)|\le k|x|$ per ogni $x$ con $\varepsilon<|x|<M$.

**1.17** – Mostrare, mediante uso diretto della definizione, che $f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.
Mostrare inoltre che $g(x) = x^2$ è uniformemente continua in $(0, a)$ per qualsiasi $a$, ma non è uniformemente continua in $(0, +\infty)$.

○ **1.18** – Sia $f$ definita e continua in $\mathbb{R}^n$. Mostrare che se esiste finito $\lim_{\underline{x}\to\infty} f(\underline{x})$, allora $f$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}^n$.

○ **1.19** – Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continue e tali che

$$\lim_{\underline{x}\to\infty} \{f(\underline{x}) - g(\underline{x})\} = 0.$$

Mostrare che se $f$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}^n$, anche $g$ lo è.

**1.20** – Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $I_k = [2k, 2k+1]$ e sia $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$.

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = 2^k$ se $x \in I_k$.

1) È possibile definire $\tilde{f} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\tilde{f}_{|E} = f$?

2) Esiste qualche $\tilde{f}$ come in 1), uniformemente continua?

## § 2 – Proprietà delle funzioni continue in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$

**2.1** – Dimostrare che l'equazione $x^5 - 3x = 1$ ammette almeno una radice reale $a$ con $1 < a < 2$.

**2.2** – Mostrare che un polinomio $P(x)$ di grado dispari ammette almeno una radice reale.

**2.3** – Sia $f : [a, b] \to [a, b]$ continua, mostrare che esiste $\overline{x} \in [a, b]$ tale che $f(\overline{x}) = \overline{x}$.



**2.4** – Sia $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Si consideri la successione definita, assegnato $u_o$, dalla relazione $u_n = f(u_{n-1})$. Mostrare che:
1) se $f$ è crescente allora $\{u_n\}$ è monotona e, detto $u$ il suo limite, è $u = f(u)$;
2) se $f$ è decrescente allora le due successioni $\{u_{2k}\}, \{u_{2k+1}\}$ sono monotone e convergenti detti $u$ e $v$ i due limiti valgono le relazioni $u = f^{[2]}(u)$ , $v = f^{[2]}(v)$.

**2.5** – Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ crescente; se $f$ assume tutti i valori fra $f(a)$ ed $f(b)$ allora $f$ è continua.

**2.6** – Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. $f$ è invertibile sul suo codominio se e solo se è strettamente monotona; inoltre la sua inversa è continua.

**2.7** – Sia $f \in C([0, 1])$ e $f(0) = f(1)$. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ esiste

$$x_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \quad \text{tale che} \quad f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right).$$

**2.8** – Sia $f \in C([a, b])$. Mostrare che se ogni $x \in (a, b)$ è di minimo relativo allora $f$ è costante.

○○ **2.9** – Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; mostrare che se ogni $x \in [a, b]$ è di minimo relativo allora $f$ assume al più una infinità numerabile di valori.

○ **2.10** – Ogni $f$ convessa su $(a, b)$ appartiene a $C((a, b))$.

**2.11** – Sia $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$ limitato, $f$ uniformemente continua su $E$. Mostrare che $f$ è limitata su $E$.
Mostrare con un esempio che la conclusione è falsa se $E$ non è limitato.

∘ **2.12** – Sia $f \in C(\mathbb{R})$. Mostrare che:
1) se $f$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$, esistono $\alpha, \beta \geq 0$ tali che

$$|f(x)| \leq \alpha|x| + \beta, \qquad (x \in \mathbb{R});$$

2) se $f$ è monotona e limitata allora è uniformemente continua.

**2.13** – Sia $f \in C([a,b])$, mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ si può determinare una funzione $g$, definita su $[a,b]$, che assume un numero finito di valori, tale che

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \qquad (x \in [a,b]).$$

**2.14** – Sia $f \in C(E)$, $E \subset \mathbb{R}$ chiuso. Mostrare che esiste $g \in C(\mathbb{R})$ con $f \equiv g$ su $E$.

∘ **2.15** – Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Mostrare che l'insieme dei punti di discontinuità di prima specie è al più numerabile.
($c \in (a,b)$ è di discontinuità di prima specie se $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ esistono finiti e sono differenti).

∘ **2.16** – Dato un chiuso $S \subset \mathbb{R}$, costruire una funzione i cui unici punti di discontinuità siano i punti di $S$.

**2.17** – Mostrare che ogni funzione continua su $\mathbb{R}$ è completamente determinata dai valori assunti su $\mathbb{Q}$. Questi valori possono essere assegnati arbitrariamente?

**2.18** – Determinare la più generale funzione continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

**2.19** – Determinare la più generale funzione continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ tale che

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y).$$



**2.20** – Sia $a \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$; per ogni $x \in \mathbb{Q}^+ - \{0\}$ sia $f_a(x)$ l'unico numero reale tale che $0 < f_a(x) < a$ e tale che $x - f_a(x)$ sia multiplo intero di $a$. Mostrare che $f_a$ è iniettiva e continua da $\mathbb{Q}^+ - \{0\}$ a $(0,a)$ e che $f_a(\mathbb{Q}^+ - \{0\})$ è denso in $[0,a]$.

## § 3 – Continuità in spazi più generali (metrici, topologici)

**3.1** – Dimostrare che le seguenti applicazioni sono continue:

1) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\quad f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x} + \underline{y}$;
2) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad f(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}|\underline{y})$;
3) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad f(\lambda, \underline{x}) = \lambda\underline{x}$.

**3.2** – Siano $X, Y$ spazi metrici e $f : X \to Y$ continua.
Mostrare che se $E \subset Y$ è chiuso allora $f^{-1}(E)$ è chiuso.

**3.3** – Sia $X$ spazio metrico e $f : X \to \mathbb{R}$ continua.
Posto

$$Z(f) = \{x : x \in X,\ f(x) = 0\},$$

mostrare che $Z(f)$ è chiuso.

**3.4** – Data la funzione $g(x) = (x-1)^2 e^x$, mostrare che ci sono insiemi aperti (chiusi) che sono portati da $g$ in insiemi non aperti (non chiusi) di $[0, +\infty)$.

**3.5** – Sia $X$ metrico e $E \subset X$. Posto $s_E(x) = s(E,x)$ ove $x$ è un punto di $X$ (vedi V.2.3), mostrare che $s_E(x)$ è uniformemente continua.

**3.6** – Siano $A$, $B$ due insiemi chiusi, non vuoti, disgiunti di uno spazio metrico $X$. Sia

$$f(x) = \frac{s_A(x)}{s_A(x) + s_B(x)},$$

mostrare che $f : X \to \mathbb{R}^+$ è continua, $f(X) = [0,1]$, $f(x) = 0$ su $A$ e $f(x) = 1$ su $B$.

**3.7 –** Una applicazione $f : X \to Y$ si definisce *aperta* quando per ogni $U \subset X$ aperto è $f(U) \subset Y$ aperto.
Dimostrare che ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aperta e continua è monotona.

**3.8 –** Siano $X$, $Y$ spazi topologici e $f : X \to Y$ continua e suriettiva. Mostrare che l'immagine di un insieme $A$ denso in $X$ è un insieme denso in $Y$.

**3.9 –** Siano $f$ e $g$ definite e continue su $X$ metrico.
Dimostrare che se assumono gli stessi valori su un sottoinsieme $T$ denso in $X$, coincidono.

**3.10 –** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identicamente nulla e tale che per ogni coppia $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sia

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right).$$

Mostrare che
1) $f(0) = 1$ e $f(x) = f(-x)$;
2) se per un dato $\alpha \neq 0$ è $f(\alpha) = \cos\alpha$ allora

$$f\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \pm\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \quad \text{e} \quad f(n\alpha) = \cos n\alpha \quad \text{per} \quad n \in Z.$$

Dedurre che se $f(x)$ è continua e positiva per $|x| < \frac{1}{2}\pi$ allora $f(x) = \cos x$.

**3.11 –** Siano $X$ compatto, $Y$ metrico ed $f : X \to Y$ continua e iniettiva. Mostrare che l'applicazione $f^{-1} : f(X) \to X$ è continua.

**3.12 –** Sia $X$ metrico compatto, mostrare che ogni funzione $f : X \to Y$, $Y$ metrico, se è continua è uniformemente continua.

○ **3.13 –** Dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono equivalenti.

## Capitolo VIII

# DERIVABILITÀ

## § 1 – Derivate delle funzioni elementari

**1.1 –** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1) $x^6 - 2x^3 + 6x$ 2) $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \ a_k \in \mathbb{R}$

3) $\frac{4}{x^3} + 5x^4 - \frac{7}{x^5} + \frac{1}{x^8}$ 4) $(5x^2 + 3)\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$

5) $\frac{1}{1 - x^2}$ 6) $\frac{(x+a)(x+b)}{x^n}, \ a, b \in \mathbb{R}$

7) $\frac{ax^2 + 2bx + c}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}, \ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

8) $\frac{a^2 b^2 c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}, \ a, b, c \in \mathbb{R}$

9) $\left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)^4$ 10) $\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$.

**1.2 –** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1) $\sqrt{x^2 + 1} - x$ 2) $\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1}$

3) $\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sqrt[3]{x}\right)^k, \ a_k \in \mathbb{R}$ 4) $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \ a \in \mathbb{R}$

5) $\sqrt{\dfrac{x+a}{x-b}}$, $a, b \in \mathbb{R}$ 6) $\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}$

7) $x^{1/3} \cdot (1-x)^{2/3} \cdot (1+x)^{-1/2}$ 8) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$

9) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$.

**1.3 –** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1) $\sin^3 x - 3 \sin x$ 2) $\sin^2 \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

3) $\dfrac{x^2}{\cos x}$ 4) $\dfrac{x}{1 - \cos x}$

5) $x \pm \sin x \cdot \cos x$ 6) $\tan x + \dfrac{1}{\cos x}$

7) $\sin^n x \cdot \cos n\, x$, $n \in \mathbb{N}$ 8) $\cos^n x \cdot \cos n\, x$, $n \in \mathbb{N}$

9) $x^2 \tan(x^2 + x + 1)$ 10) $\dfrac{x^2}{1 + \cos x} + \tan \dfrac{x}{2}$.

**1.4 –** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1) $x \arcsin x$ 2) $\sin(2 \arctan x)$

3) $\dfrac{x}{1+x^2} - \arctan x$

4) $\pm \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

5) $\arcsin(\sin x)$

6) $\dfrac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} \cdot \tan \dfrac{x}{2}\right)$, $a > b > 0$

7) $\arctan\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$ 8) $\arctan \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

9) $\arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

10) $\arcsin \dfrac{\sin x \cdot \sin \alpha}{1 - \cos \alpha \cdot \cos x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.



**1.5 –** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1) $x(\ln\, x - 1)$ 2) $\ln \dfrac{x+a}{x+b}$, $a, b \in \mathbb{R}$

3) $\ln\left(\tan \dfrac{x}{2}\right)$ 4) $\ln\, \ln\, x$

5) $\ln\, \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} - \dfrac{1}{2x^2}$ 6) $\ln \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

7) $\dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1}{2} \arctan x$ 8) $x\, \tan x + \ln(\cos x)$

9) $\arctan\left(\ln \dfrac{1}{x}\right)$ 10) $\dfrac{x^2}{\ln\, x}$.

**1.6 –** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1) $e^{(e^x)}$ 2) $2^{\frac{x}{\ln x}}$

3) $x \cdot e^{1 - \cos x}$ 4) $\ln(e^x + e^{-x} - 2)$

5) $6^{\sqrt[3]{(\ln(\sin x^2)^3)^2}}$ 6) $\mathrm{Th}(\ln\, x)$

7) $\mathrm{Ch}(\mathrm{Sh}\, x)$ 8) $e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$

9) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + e^{-\sqrt{x}}}}$ 10) $\sqrt{\arctan\left(\mathrm{Sh}\, \dfrac{x}{3}\right)}$.

**1.7 –** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1) $x^{x(x-1)}$ 2) $\sin(x^{\ln\, x})$ 3) $x^{(x^x)}$

4) $(x^2+2)^{\sin x}$ 5) $(\cos x)^{1/x}$.

**1.8 –** Indicate con sett Sh $x$, sett Ch $x$, sett Th $x$ le funzioni inverse di Sh $x$, Ch $x$ $(x \geq 0)$, Th $x$ rispettivamente, calcolarne le loro derivate.

**1.9 –** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1) $\mathrm{Th}\left(\sqrt{\ln(\sin e^x)}\right)$ 2) $\ln(\arctan 2^x)$

3) $-x + \mathrm{Ch}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ 4) $\ln\sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\, x - \mathrm{Sh}\ x}{\mathrm{Ch}\, x + \mathrm{Sh}\ x}}$

5) $\left(x - \sqrt{1 - x^2}\right)^x$ 6) $\sqrt{\frac{x + e^x}{\cos x}}$

7) $\tan\left(x^2 + \sqrt{x}\right)^{\ln x}$ 8) $\arctan x + \mathrm{sett\ Th}\, x + \cos x$

9) $\arctan \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ 10) $\log_5(e^x \cos x + e^{-x} \sin x)$

11) $\mathrm{sett\ Ch}\, x - \arccos \frac{1}{x}$ 12) $\sqrt{1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

13) $\sin(\sin x)$ 14) $\cos^2 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

15) $\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

**1.10** – Determinare ove le seguenti funzioni reali di variabile reale sono derivabili e calcolarne la derivata:

1) $x\ \ln(1 + |\ln|x||)$ 2) $\ln\left|\frac{x\ \ln|x| - 1}{x}\right|$

3) $\sqrt{x + |x|^3 + 1}$ 4) $Ch|x|$

5) $|x + 1|^{\frac{x}{x-2}}$ 6) $\sqrt{\sin\sqrt{|x|}}$

7) $\arcsin \frac{\sqrt{2} \cdot x^2}{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}}$.

**1.11** – Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di periodo 2 la cui restrizione all'intervallo $[-1, 1]$ è $g(x) = 4x(1 - |x|)$.
Mostrare che $f \in C^1(\mathbb{R})$ e tracciare i diagrammi di $f(x)$ e $f'(x)$.

**1.12** – Determinare le coordinate dei punti delle seguenti curve ove la tangente al diagramma è orizzontale:

1) $y = x^2 - 4x + 5$ 2) $y = x^2 + \frac{1}{x}$



3) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ 4) $y = \sqrt{x(1 - x)}$.

**1.13** – Mostrare che funzioni pari (dispari) derivabili hanno derivate dispari (pari).

**1.14** – Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T$ e derivabile; mostrare che $f'$ è anch'essa periodica di periodo $T$.

**1.15** – Sia

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{per} \quad x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 0 & \text{per} \quad x = 0. \end{cases}$$

Mostrare che $f$ è continua in $x = 0$, ma non è ivi derivabile.

**1.16** – Derivando in due maniere diverse la funzione $f(x) = (1 + x)^n$, calcolare:

1) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ 2) $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

**1.17** – Se $f$ e $g$ ammettono derivata seconda, mostrare che

$$D(f(x)g'(x) - f'(x)g(x)) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x).$$

**1.18** – Sia $f(x)$ definita e derivabile in $(a, b)$ e $f'(x) = f(x)$.
Mostrare che $f(x)$ ammette la derivata di qualunque ordine e che tutte le derivate sono eguali fra loro.

**1.19** – Nelle ipotesi opportune per $f$ esprimere $D^3 f(x^3)$, $D^2 f(\sqrt{x})$, $D^4 f(x - x^2)$, mediante $f$ e le sue derivate.

**1.20** – Sia $f$ derivabile 2 volte, allora è

$$\left(x f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'' = x^{-3} \cdot f''\left(\frac{1}{x}\right).$$

**1.21** – Sia $f(x) = |x|^3$, calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$ e mostrare che $f^{(3)}(0)$ non esiste.

**1.22 –** Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $g'(x_\circ) = 0$ per ogni $x_\circ$ con $g(x_\circ) = 0$, mostrare che $|g(x)|$ è derivabile.

**1.23 –** Siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ le $n$ radici reali distinte di un polinomio $P(x)$ di grado $n$. Mostrare che

$$\frac{(P'(x))^2 - P(x)P''(x)}{P^2(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x - x_k)^2} .$$

**1.24 –** Sia $P(x)$ un polinomio di terzo grado in $x$ e sia $y^2 = P(x)$. Esprimere $y^{-2} D(y^3 D^2 y)$ in termini di $P(x)$ e delle sue derivate e mostrare che tale espressione è costante.

**1.25 –** Sia $f$ derivabile $n$ volte, mostrare che

$$\frac{d^n}{dx^n} f(ax + b) = a^n f^{(n)}(ax + b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

**1.26 –** Determinare $D^{100}(\sin x \cos x)$.

**1.27 –** Calcolare la derivata $n$–esima di

$$\frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0.$$

**1.28 –** Calcolare le derivate $n$–esime delle seguenti funzioni:

1) $2^x$     2) $x^2 \ln x$

3) $x^3 e^{2x}$     4) $e^x \cdot \cos 2x$.

**1.29 –** Dimostrare che

$$\left[ D^n \left( \frac{x^3}{x^2 - 1} \right) \right]_\circ = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad n = 2h \\ n! & \text{per} \quad n = 2h + 1, \quad n > 2. \end{cases}$$

$$\left( [D^n f(x)]_{x_\circ} = f^{(n)}(x_\circ) \right).$$



**1.30 –** Verificare le seguenti uguaglianze:

1) $\displaystyle \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \frac{\ln x}{x} = (-1)^n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \left( \ln x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$

2) $\displaystyle \frac{d^n}{dx^n} (e^x \sin x) = 2^{n/2} e^x \sin\left( x + n\frac{\pi}{4} \right).$

**1.31 –** Calcolare la derivata prima e la derivata seconda della funzione inversa (esistente) di

$$y = x - \arctan x.$$

**1.32 –** Provare che se $x = \cot\theta$, $0 < \theta < \pi$, allora

$$\frac{d^n \theta}{dx^n} = (-1)^n (n-1)! \sin^n \theta \cdot \sin n\theta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

∘ **1.33 –** Sia $f : (a, b) \to J$ ($J$ intervallo di $\mathbb{R}$) suriettiva di classe $C^n$ su $(a, b)$ con $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.
Mostrare che la funzione inversa è di classe $C^n(J)$.

**1.34 –** Sia

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{per} \quad x < 0 \\ \dfrac{\sin^5\left(\dfrac{x^2}{2}\right)}{\tan^2\left(\dfrac{x^3}{4}\right)} & \text{per} \quad x > 0 \end{cases} .$$

1) Determinare l'insieme di definizione $E$.
2) Determinare i punti in cui si può prolungare $f$ con continuità.
3) Determinare i punti in cui il prolungamento di $f$ così ottenuto è derivabile.

**1.35** – Sia

$$f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{per} \quad x > 0 \\ 1 & \text{per} \quad x = 0 \\ \operatorname{Ch}\sqrt{-x} & \text{per} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Mostrare che $f$ è continua e due volte derivabile e verificare che

$$4xf''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$$

## § 2 – Teorema de l'Hospital e formula di Taylor

**2.1** – Determinare, al variare del parametro reale positivo $k$, i seguenti limiti:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^k}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^k x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{Sh} x}{x^k}$.

**2.2** – Calcolare, al variare del parametro reale $k$, i seguenti limiti:

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^k e^{-\frac{1}{x^2}}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k e^{\sin x + \ln x}$.

**2.3** – Calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Th} x - \sin x}{(\ln(1+x))^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \ln(1+x)}{\tan^2 x}$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+27} - 3}{\sqrt[4]{x+16} - 2}$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1}}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\{\dfrac{1}{e} - \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\right\}$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$.



**2.4** – Si consideri $f(x)$ definita in $(0,1)$ e $(1,+\infty)$ da

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}.$$

Mostrare che $f$ è prolungabile con continuità in $(0,+\infty)$ e che tale prolungamento è derivabile in $(0,+\infty)$.

**2.5** – Siano $f(x) = x^2 \cos\dfrac{1}{x}$ e $g(x) = \sin x$, per $x \neq 0$.

Mostrare che esiste $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ma non esiste $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

**2.6** – Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0)=1$, se $f'(x)$ esiste continua in $x=0$ allora

$$\lim_{x\to 0} (f(x))^{1/x} = e^{f'(0)}.$$

**2.7** – Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ affinché

$$g(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

sia infinitesimo del massimo ordine possibile rispetto ad $x$ per $x \to 0$.

**2.8** – Siano $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ mostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (a_k)^{1/x}\right)^x = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}.$$

**2.9** – 1) Sia $f(x) = x + \sin x$ e sia $g(y)$ la sua funzione inversa in un intorno dell'origine; calcolare $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2g(y) - y}{y^2}$.

2) Sia $f(x) = x - \sin x$, e sia $g(y)$ la sua funzione inversa in un intorno dell'origine; calcolare $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{g(y)}{y}$.

**2.10** – Determinare i primi 4 termini dello sviluppo di Taylor nel punto $x_0$ delle seguenti funzioni:

1) $\ln x$, $x_0 = 2$ 2) $\sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

3) $e^{1/x}$, $x_0 = 1$.

**2.11** – Dare la formula di MacLaurin arrestata all'ordine 4 delle seguenti funzioni:

1) $\dfrac{b+x}{a+x}$, $a,b \in \mathbb{R}$ , $a \neq 0$ 2) $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

3) $(1+e^x)^3$ 4) $\dfrac{\sin x}{1-x}$.

**2.12** + Determinare i primi 3 termini dello sviluppo di MacLaurin delle seguenti funzioni:

1) $(1+x)^x$ 2) $(\mathrm{Ch}\ x)^{\sin x}$ 3) $\sin(\ln(1+x))$.

∘ **2.13** – Sia $f \in C^n([a,b])$ ed esista $f^{(n+1)}$ su $(a,b)$ e sia $G$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $(a,b)$, $G'(x) \neq 0$.
Allora fissato $x_0 \in (a,b)$, mostrare che esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{G(x)-G(x_0)}{G'(c)}, \qquad (x \in (a,b)).$$

(Si dice che $f \in C^k([a,b])$ quando esiste un aperto $(\alpha,\beta)$ con $\alpha < a \le b < \beta$, tale che $f \in C^k((\alpha,\beta))$).

**2.14** + Per ciascuna delle seguenti quantità

$$1)\ \sin\frac{1}{3}; \qquad 2)\ \sqrt[7]{5/4}$$

determinare un numero razionale che l'approssima con un errore inferiore a $10^{-6}$.

**2.15** + Determinare un numero razionale che differisce da $\sqrt[5]{20}$ per meno di $10^{-3}$.

**2.16** – Determinare un polinomio di Taylor che approssima la funzione

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



sull'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ con un errore inferiore a $10^{-5}$.

**2.17** + Dopo aver verificato che la funzione $f(x) = x + \mathrm{Sh}\, x$ è invertibile da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, determinare il polinomio di Taylor di terzo grado centrato nell'origine della funzione inversa di $f$.

∘ **2.18** – Sia $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$ e sia $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$. Mostrare che $\tan\beta = \frac{1}{239}$ e quindi che $\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}$. Usando quindi la formula di Taylor per $\arctan x$, dare un numero razionale che differisca da $\pi$ per meno di $10^{-7}$.

## § 3 – Proprietà delle funzioni derivabili

**3.1** – Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$x^3 - 6x^2 + 9x + k = 0$$

ammette una sola radice reale.

∘ **3.2** – Sia $P(x)$ un polinomio; cosa si può dire:
1) del numero delle radici di $P'(x)$ che giacciono fra due radici consecutive di $P(x)$;
2) del numero delle radici di $P(x)$ che giacciono fra due radici consecutive di $P'(x)$.
Se

$$P(n,x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

provare che l'equazione $P(n,x) = 0$ ha una sola radice reale per $n$ dispari e nessuna per $n$ pari.

**3.3** – Sia

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$P, Q$ polinomi. Mostrare che esiste $R > 0$ tale che per $|x| > R$ $f(x)$ è monotona.

**3.4** – Sia $f \in C((x_\circ - \delta, x_\circ + \delta))$ e derivabile in tale intervallo escluso al più il punto $x_\circ$.
Mostrare che se esiste $\lim_{x \to x_0} f'(x)$,

allora esiste $f'(x_\circ)$ e $f'(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ} f'(x)$.

**3.5** – Sia $f(x)$ derivabile in $[a, b]$; mostrare che $f'(x)$ assume in $(a, b)$ almeno una volta ogni valore compreso fra $f'(a)$ e $f'(b)$.

**3.6** – Sia $f(x)$ definita e derivabile su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e $f'(x) \neq 0$ per $x \in I$; dimostrare che $f(x)$ è monotona su $I$.

**3.7** – Sia $f$ continua su $[a, +\infty)$ e derivabile su $(a, +\infty)$, dimostrare che se $f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ allora esiste $\xi > a$ con $f'(\xi) = 0$.

**3.8** – Sia $f \in C([a, b])$ e derivabile in $(a, b)$ con $f'(x) \leq M$; mostrare che se $f(b) - f(a) = M(b - a)$ allora $f(x) = f(a) + M(x - a)$ per ogni $x \in [a, b]$.

**3.9** – Sia $f$ derivabile in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e $|f'(x)| < M$, allora $f$ è uniformemente continua su $I$.

**3.10** – Una funzione $f$ definita e differenziabile su $I \subset \mathbb{R}$ si dice *uniformemente differenziabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ (indipendente da $x$) tale che per $0 < |h| < \delta$ e per ogni $x \in I$ è

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

Mostrare che le funzioni di $C^1([a, b])$ sono uniformemente differenziabili.

**3.11** – Se $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 12x$, $g(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2$ allora $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} - 2 \neq \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ per $x \in (0, 1)$.
Discutere il precedente risultato in relazione alla formula di Cauchy sull'incremento di due funzioni.



○ **3.12** – Sia $f \in C([a, b])$ e derivabile su $(a, b)$, mostrare che se $f(a) = f(b) = 0$ allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste $a < \xi < b$ tale che $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

○ **3.13** – Sia $f \in C([a, b])$ e derivabile su $[a, b]$, mostrare che se $f'(a) = f'(b)$ esiste $\xi$, $a < \xi < b$, con

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

**3.14** – Sia $f \in C^2([a, b])$; mostrare che
1) se $f(a) = f(b) = 0$ e $f''(x) \leq 0$ per $x \in [a, b]$, allora $f(x) \geq 0$ per $x \in [a, b]$;
2) se $f''(x) \leq 0$ per $x \in [a, b]$ allora

$$f(x) \geq f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{per} \quad x \in [a, b].$$

**3.15** – Sia $f \in C^2([0, +\infty))$ con $f''(x) > 0$ per $x > 0$; mostrare che
1) se $\lim_{x \to +\infty} \{x\, f'(x) - f(x)\} \leq 0$

allora $\dfrac{f(x)}{x}$ è decrescente in $(0, +\infty)$;

2) se $f(0) \leq 0$

allora $\dfrac{f(x)}{x}$ è crescente in $(0, +\infty)$;

3) se $f(0) = 0$

allora $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{per} \quad x > 0 \\ f'(0) & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$ è crescente in $[0, +\infty)$.

**3.16** – Sia $f \in C^2([0, +\infty))$ e siano $M_c = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$, $M_1 = \sup_{x \geq 0} |f'(x)|$,

$M_2 = \sup_{x \geq 0} |f''(x)|$; mostrare che $M_1^2 \leq 4M_0M_2$ (salvo il caso in cui al secondo membro si presenti la forma $0 \cdot \infty$).

**3.17** – Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < (x - y)^2, \quad x, y \in \mathbb{R};$$

mostrare che $f$ è costante.

∘ **3.18 –** Sia $f \in C^1([a,b])$, $f(a) = 0$ ed esista $A > 0$ tale che

$$|f'(x)| \leq A|f(x)| \quad \text{per} \quad x \in [a,b].$$

Mostrare che $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

**3.19 –** Sia $f(x) = x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $g \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $f \circ g = g \circ f$; mostrare che $g'$ è periodica.

**3.20 –** Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$ con $|g'(x)| < M$; dimostrare che esiste $h > 0$ tale che per $x < \varepsilon < h$ la funzione $f(x) = x + \varepsilon g(x)$ è biiettiva.

**3.21 –** Sia $f \in C^\infty([a,b])$, $a \leq 0 \leq b, f^{(n)}(0) = 0$ per $n \in \mathbf{N}$,
$\sup_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \leq n!K^n$ ove $K \in \mathbb{R}^+$.
1) Mostrare che $f$ è nulla su $[a,b]$.
2) Considerato

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per} \quad x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

mostrare che

$$g \in C^\infty(\mathbb{R}), \; g^{(n)}(x) = G_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}, \; (x \neq 0),$$

ove $G_n$ è un polinomio. Dedurre che $\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0$.

**3.22 –** Si consideri

$$f(x) = \left\{\sum_{k=1}^{n}(x\, a_k + (1-x)b_k)^s\right\}^{1/s},$$

ove $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $s \geq 1$; mostrare che $f$ è convessa in $[0,1]$ e dedurre che

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^s\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^s\right)^{1/s} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^s\right)^{1/s}$$

(Disuguaglianza di Minkowski).



∘ **3.23 –** Siano $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabili; mostrare che $\max(f,g)$ è differenziabile salvo su un insieme al più numerabile.

∘ **3.24 –** Sia $f$ differenziabile in $(a,b)$, $\overline{x} \in (a,b)$, $\overline{x} < \alpha_n < \beta_n$, $n = 1,2,3,\ldots$, $\alpha_n \to \overline{x}$ $\beta_n \to \overline{x}$ per $n \to +\infty$.
Mostrare, con un esempio, che

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$

non converge necessariamente a $f'(\overline{x})$.
Mostrare che se la successione

$$\left\{\frac{\beta_n - \overline{x}}{\beta_n - \alpha_n}\right\}$$

è limitata allora

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \to f'(\overline{x}) \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

**3.25 –** Sia $f : I \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_\circ \in I$ mostrare che se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + \beta h) - f(x_\circ - \alpha h)}{(\alpha + \beta)\cdot h} = f'(x_0).$$

Mostrare con un esempio che questo limite può esistere anche se non esiste $f'(x_0)$. (Tale limite, per $\alpha = \beta$, si chiama *derivata prima simmetrica*).

∘ **3.26 –** Sia $f \in C((-1,1))$ con derivata simmetrica sempre nulla, mostrare che $f$ è costante.

**3.27 –** Sia $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$, due volte differenziabile in $x_\circ \in I$, mostrare che allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

Mostrare con un esempio che questo limite può esistere senza che esista $f''(x_0)$.
(Tale limite viene detto *derivata seconda simmetrica*).

∘ **3.28 –** Sia $f \in C([a,b])$ con derivata seconda simmetrica nulla in $(a,b)$;mostrare che $f$ è lineare in $[a,b]$.

**3.29 –** Sia $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in I$; si dice che $f$ ammette derivata *umbral* del secondo ordine in $x_0$ se esiste

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{\frac{h^2}{2!}} = [f''(x_0)].$$

Per ricorrenza si definisce la derivata *umbral* $n$–esima in $x_0$ come

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0) - \sum_{r=2}^{n-1} \frac{h^r}{r!}\left[f^{(r)}(x_0)\right]}{\frac{h^n}{n!}} = \left[f^{(n)}(x_0)\right].$$

1) Mostrare che se in $x_0$ $f$ ammette derivate fino all'ordine $n$, queste coincidono con le derivate umbral.

2) Verificare che

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

ammette derivata umbral del secondo ordine in $x = 0$ ma non ammette derivata seconda.
La nozione qui introdotta di *umbral derivata* si trova già in G.Peano, 1891.

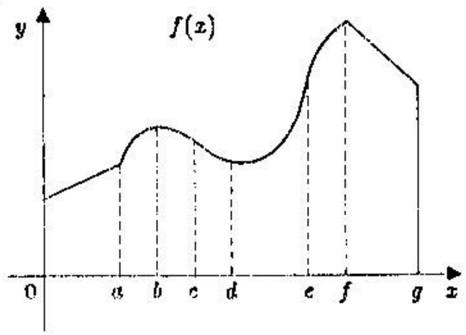
**3.30 –** Mostrare che se $f : (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ ammette in $x_0$ derivata seconda umbral allora ammette anche derivata seconda simmetrica.

Capitolo IX

# STUDIO DI FUNZIONI

## § 1 – Esercizi introduttivi sullo studio dell'andamento delle funzioni reali di variabile reale.

**1.1 –** Detta $f(x)$ la funzione il cui diagramma è in figura, tracciare un diagramma qualitativo di $f'(x)$ ed $f''(x)$.




**1.2 –** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ convessa (vedi VI.1.21) e derivabile, allora $f'$ è monotona non decrescente.

**1.3 –** Determinare massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}\sin(1 + \ln\sqrt{x}) \quad \text{per} \quad x > 0.$$

**1.4 –** Determinare il punto di minimo assoluto di

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x - a_k)^2 \quad \text{ove} \quad p_k > 0,\ a_k \in \mathbb{R}.$$

**1.5 –** Determinato l'insieme di definizione della funzione

$$f_\lambda(x) = x^2\sqrt{\lambda - x}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

trovare $\lambda$ in modo che $x = 1$ sia interno a tale insieme e che $f_\lambda(x)$ abbia un massimo in tale punto.

**1.6** – Stabilire se la funzione $f(x) = x^x$ ammette minimo assoluto in $(0, +\infty)$; in caso affermativo determinarlo.

**1.7** – Determinare minimi relativi e assoluti della funzione

$$f(x) = |x^3| + |4x - 5|^3.$$

**1.8** – Studiare il crescere e il decrescere della funzione

$$f(x) = 3\,\mathrm{Sh}\,x - 3x\,\mathrm{Ch}\,x + x^3$$

nell'origine.

**1.9** – Determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = e^{\sqrt{4x - x^4}} \quad \text{in} \quad \left[0, \sqrt[3]{2}\right].$$

**1.10** – Siano $x, y \in \mathbb{R}^+$ tali che $x + y = s$ costante. Mostrare che il prodotto $x^p y^q, p, q > 0$, è massimo quando $x$ e $y$ assumono valori proporzionali a $p$ e $q$.

**1.11** – Determinare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x) = x^2 - 3|x - 1| + 2 \quad \text{in} \quad [-2, 3].$$

**1.12** – Data la funzione $f(x) = |x - 1| e^{|x|}$ determinare estremo superiore, estremo inferiore, eventuali massimo e minimo assoluti di $f$ in ciascuno dei seguenti intervalli:

$$(-\infty, +\infty), \quad [-1, 1), \quad [0, 1], \quad [-1, 3].$$



∘ **1.13** – Siano $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$; determinare il minimo valore di $x \in \mathbb{R}$ per cui si abbia

$$a \sec\theta + x\cos\theta \geq b, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

**1.14** – Fra tutti i triangoli $ABC$ che hanno costante l'angolo $B\hat{A}C = \alpha$ e l'altezza $h$ relativa a $BC$, determinare quello in cui è minima la lunghezza di $BC$.

**1.15** – Dimostare che l'equazione

$$12x^6 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$$

ha una sola radice positiva.

**1.16** – Mostrare che l'equazione

$$x^n + px + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ha al più due radici reali per $n$ pari e tre radici reali per $n$ dispari.

**1.17** – Mostrare che l'equazione

$$e^{ax} = bx, \qquad a, b > 0,$$

ha due, una o nessuna radice reale secondo che sia $\dfrac{b}{a} \begin{smallmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{smallmatrix} e$.

∘ **1.18** – 1) Discutere il numero delle radici positive dell'equazione

$$a^x = x^b \qquad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

2) Mostrare che l'equazione $a^{(a^x)} = x$ ha le stesse radici dell'equazione $a^x = x$ e dedurre il numero delle radici della prima equazione

○ **1.19** – Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa ed esistano $a_1, b_1 \in (a,b)$, $a_1 < b_1$, tali che $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$.
Mostrare che esiste uno e un solo punto $\xi \in (a_1, b_1)$ ove $f(\xi) = 0$ e che $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$, dove $x_0 = a_1$

$$x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f(b_1) - f(x_n)}(b_1 - x_n) + x_n.$$

(Metodo delle corde).

○ **1.20** – Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e derivabile ed esistano $a_1, b_1 \in (a,b), a_1 < b_1$, tali che $f(a_1)f(b_1) < 0$.
Mostrare che esiste uno e un solo punto $\xi \in (a_1, b_1)$ ove $f(\xi) = 0$ e che $\xi = \lim_{n\to+\infty} x_n$, dove

$$x_0 \in (a_1, b_1) \text{ e } f(x_0) > 0 \text{ e}$$

$$(*) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

(Metodo delle tangenti o di Newton).

**1.21** – Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $C^2([a,b])$ e convessa, con $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Detto $\xi$ il solo punto in $[a,b]$ ove $f(\xi) = 0$ (vedi IX.1.20), mostrare che la successione $\{x_n\}$ definita in IX.1.20 soddisfa la disuguaglianza

$$x_{n+1} - \xi \le C(x_n - \xi)^2 \text{ dove}$$

$$C = \frac{\max\{f''(x) : x \in [\xi, b]\}}{2\min\{f'(x) : x \in [\xi, b]\}}.$$

**1.22** – Si consideri la funzione $f(x) = 3x - \ln x - 4$. Dopo avere mostrato che nell'intervallo $[1,2]$ esiste uno e un solo zero $\xi$ di $f$, posto $x_0 = 2$ e $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, determinare $n$ in modo che $|x_{n+1} - \xi| \le 10^{-3}$.

**1.23** – Determinare per quali valori di $x$ è $\ln x < \sqrt{x}$.



**1.24** – Studiare il segno della funzione $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}$.

**1.25** – Studiare il segno di $f(x) = 2x\ln x + 1 - x^2$.

**1.26** – Studiare il segno della funzione $f(x) = x^2 + x + 1 - e^x$.

**1.27** – Studiare il segno della funzione $f(x) = \operatorname{Ch}\frac{1}{x^2} - 1 - \frac{2}{x^2}\operatorname{Sh}\frac{1}{x^2}$.

**1.28** – Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{x - 2\ln|x+1|}{(e^x - 2x - 1)^{1/2}} \le 0.$$

**1.29** – Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{e^x - e\sqrt{|x|}}{\sqrt{|(e-1)x+1| - e^x}} < 0.$$

**1.30** – Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{\ln\left(x + 1 - \sqrt[5]{x}\right)}{\sqrt[5]{x} - \ln|x| - 1} > 0.$$

**1.31** – Determinare gli eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = x^3\left(1 - \operatorname{Ch}\frac{1}{x}\right)$

2) $f(x) = x^2\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right)$

3) $f(x) = 2x + \sqrt{x^2+1}$.

**1.32** – Determinare gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + \sin x^2}{x+1}.$$

**1.33** – Sia $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, P, Q$ polinomi. Mostrare che $f$ ammette un asintoto obliquo se e solo se $\operatorname{gr} P = \operatorname{gr} Q + 1$.

**1.34** – Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,derivabile. Mostrare, con un esempio, che l'esistenza dei due limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = q$$

non implica l'esistenza di

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - xf'(x)).$$

## § 2 – Studio dell'andamento di funzioni reali di variabili reali

Studiare l'andamento e tracciare il diagramma delle funzioni sottoelencate. Per effettuare tale studio potrà essere utile adottare lo schema seguente: insieme di definizione, eventali simmetrie o periodicità, limiti di $f(x)$ alla frontiera dell'insieme di definizione, zeri e segno di $f(x)$, continuità, eventuali asintoti, derivabilità, limiti di $f'(x)$, eventuali punti angolari e cuspidi, crescere e decrescere di $f(x)$, eventuali estremanti, verso della concavità, eventuali punti di flesso, ecc.

**2.1** – $$f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3.$$

**2.2** – $$f(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4}.$$

**2.3** – $$f(x) = x^2 \ln|x|.$$

**2.4** – $$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

**2.5** – $$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin x}.$$

**2.6** – $$f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

**2.7** – $$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}.$$



**2.8** – $$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}{x}.$$

**2.9** – $$f(x) = \ln\left|1 - \frac{1}{\ln|x|}\right|.$$

**2.10** – $$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2\arctan\frac{1-x}{1+x}.$$

**2.11** – $$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

**2.12** – $$f(x) = \frac{1 + |\ln x|}{1 + \ln x}.$$

**2.13** – $$f(x) = x\left(\ln|x| - \frac{x}{e}\right).$$

**2.14** – $$f(x) = 2x + \arctan\frac{x}{x^2 - 1}.$$

**2.15** – $$f(x) = \sqrt[3]{\sin x} \cdot e^x, \quad -\pi \le x \le \pi.$$

**2.16** – $$f(x) = x\left|1 + \frac{1}{\ln x}\right|.$$

**2.17** – $$f(x) = -x + \mathrm{Ch}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right).$$

**2.18** – $$f(x) = \frac{\mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Sh}\, x - 1} + 2x.$$

**2.19** – $$f(x) = x|\ln x|^{1/2}.$$

**2.20** – $$f(x) = \sin x(1 - 2\sin x).$$

**2.21** – $$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} + \ln\left|\sqrt[3]{x} - 1\right|.$$

**2.22** – $$f(x) = \frac{x\ln x}{x-1}.$$

**2.23** – $$f(x) = \frac{x\ln|x| - (x+1)\ln|x+1|}{x}.$$

**2.24** – $$f(x) = \tan x + \ln|\cos x| - x.$$

**2.25** – $$f(x) = x\,\mathrm{Ch}\,\frac{1}{x^3} + |x|.$$

**2.26** – $$f(x) = 1 - e^{2x\ln|x|}.$$

2.27 – $$f(x) = \ln\left|x + \ln(x^2)\right|.$$

∘ 2.28 – $$f(x) = 2x + x^2 \sin\frac{1}{x}.$$

2.29 – $$f(x;m) = \frac{(x-1)^m}{x^{m-1}}, \quad m \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Tracciare il diagramma della famiglia di curve che si ottengono al variare del parametro $m$.

2.30 – $$f(x;c) = x + \frac{cx}{\ln x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Tracciare il diagramma della famiglia di curve che si ottengono al variare del parametro $c$.

Capitolo X

# SUCCESSIONI DI FUNZIONI, SERIE DI FUNZIONI, SERIE DI POTENZE

## § 1 – Successioni e serie di funzioni.

**1.1** – Sia

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Mostrare che la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente ma non uniformemente su $\mathbb{R}$.

**1.2** – Sia

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1-x^n}, \qquad -1 \le x \le 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Stabilire
1) se $\{f_n\}$ converge puntualmente su $[-1,1]$;
2) se $\{f_n\}$ converge uniformemente su $(-1,1]$.

**1.3** – Sia

$$f_n(x) = |x|^{1/n} \cdot e^{nx}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Determinare l'insieme di convergenza di $\{f_n\}$ e stabilire se su tale insieme la convergenza è uniforme.

**1.4 –** Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad n \le x \le n+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, (x \in \mathbb{R}).$$

Mostrare che $\{f_n\}$ converge puntualmente a 0 su $\mathbb{R}$; converge uniformemente su ogni insieme della forma $(-\infty, a]$, ma non su $\mathbb{R}$.

**1.5 –** Mostrare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$ converge per $0 \le x \le r < 2$ e che su tale intervallo la convergenza non è uniforme. Mostrare che la convergenza è uniforme su ogni intervallo $[a, r]$ con $0 < a \le x \le r < 2$.

**1.6 –** Determinare, per ciascuna delle seguenti serie di funzioni, l'insieme $T$ di convergenza puntuale; stabilire inoltre se su $T$ la convergenza è oppure no uniforme.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^x}$.

**1.7 –** Sia

$$f_n(x) \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{per} \quad x \le n \\ 0 & \text{per} \quad x > n \end{cases}.$$

Mostrare che $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f(x) \equiv 0$ su tutto $\mathbb{R}$.
Mostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = F(x)$ ove

$$F(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ per } n-1 < x \le n,$$

e che la convergenza è uniforme.



**1.8 –** Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \le 0 \\ nx & \text{per} \quad 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{per} \quad \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \text{per} \quad x > \frac{2}{n} \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

1) Mostrare che $\{f_n\}$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$, ma che in tutti gli intervalli aperti contenenti lo zero la convergenza non è uniforme.
2) Mostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è assolutamene convergente, ma non uniformemente convergente, su $\mathbb{R}$.

**1.9 –** Sia

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{per} \quad n \le x < n+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N} - \{0\};$$

mostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ è assolutamente e uniformemente convergente su $\mathbb{R}$, ma non è *normalmente convergente*.
(Una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ si dice *normalmente convergente* se esiste una successione $\{a_n\}$ di numeri reali positivi tale che $|u_n(x)| \le a_n$ per ogni $x$ e per ogni $n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$).

**1.10 –** Mostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin x + n}{n^2}$$

converge uniformemente su $\mathbb{R}$, ma non converge assolutamente per alcun valore di $x$.

**1.11 –** Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$, sia

$$f_n(x) = f(x-n), \qquad n \in \mathbb{N};$$

mostrare che $f_n \to A$ per $n \to +\infty$.
Mostrare inoltre che la convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $(-\infty, a]$, ma non su $\mathbb{R}$, salvo il caso $f(x) \equiv A$.

**1.12 –** Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x = 0$ sia

$$f_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N} - \{0\};$$

mostrare che $f_n \to f(0)$ per $n \to +\infty$, uniformemente sui compatti.

**1.13 –** Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = B$, sia

$$f_n(x) = f(nx), \qquad n \in \mathbb{N};$$

mostrare che $f_n \to g$ ove

$$g(x) = \begin{cases} A & \text{per} \quad x < 0 \\ f(0) & \text{per} \quad x = 0 \\ B & \text{per} \quad x > 0 \end{cases};$$

mostrare che, in generale, la convergenza non è uniforme.

**1.14 –** Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in C(\mathbb{R})$, sia

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N} - \{0\};$$

mostrare che, se $f$ è uniformemente continua,* $f_n \to f$ uniformemente per $n \to +\infty$.

**1.15 –** Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni ciascuna delle quali limitata; $\{f_n\}$ sia uniformemente convergente su un insieme $T$; mostrare che esiste $K > 0$ tale che per ogni $n$ e per ogni $x \in T$ è $|f_n(x)| \leq K$ (cioè le funzioni $f_n$ sono *equilimitate*).

**1.16 –** Mostrare, con un esempio, che una successione di funzioni convergente puntualmente può non essere equilimitata.



**1.17 –** Mostrare che se le successioni di funzioni $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ convergono uniformemente su $T$, allora anche $\{f_n + g_n\}$ converge uniformemente su $T$; se inoltre $f_n$ e $g_n$ sono limitate per ogni $n$, anche $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente su $T$.

**1.18 –** Dare un esempio di successioni di funzioni $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ uniformemente convergenti, tali che $\{f_n g_n\}$ non converga uniformemente.

**1.19 –** Sia

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \qquad n \in \mathbb{N};$$

mostrare che $f_n \to 0$ uniformemente per $n \to +\infty$, $\{f_n'\}$ converge ma $f_n' \not\to 0$.

**1.20 –** Mostrare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}$$

non può essere differenziata termine a termine.

**1.21 –** Mostrare che la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

soddisfa la relazione $xf'(x) = (x+1)f(x)$.

**1.22 –** Siano $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ definita su $T$ e $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ abbia la successione delle somme parziali equilimitate ed inoltre $g_n \to 0$ uniformemente su $T$ e $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ per $n \in \mathbb{N}, x \in T$.
Mostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot f_n(x)$$

converge uniformemente su $T$.

**1.23** – Studiare la convergenza semplice e uniforme delle serie

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

∘ **1.24** – Mostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[nx]}{n^3}$ converge uniformemente su ogni intervallo finito ad una funzione $f(x)$ continua in ogni punto irrazionale e tale che se $x=\frac{p}{q}$, con $p$ e $q$ primi fra loro e $q>0$, è

$$\lim_{x\to\left(\frac{p}{q}\right)^+} f(x)-\lim_{x\to\left(\frac{p}{q}\right)^-} f(x)=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}}{q^3}.$$

∘∘ **1.25** – Sia $f_n(x)$ definita come in X.1.8 e sia $\{r_n\}$ la successione dei razionali; posto

$$g_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m}f_n(x-r_m),$$

mostrare che le $g_n$ sono continue, $g_n\to 0$ su $\mathbb{R}$ puntualmente, ma non converge uniformemente in alcun intervallo.

∘ **1.26** – Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni monotone su $[a,b]$ e $\{f_n\}$ converga puntualmente a una funzione $f\in C([a,b])$.
Mostrare che la convergenza è uniforme su $[a,b]$.

∘ **1.27** – Sia $T\subset\mathbb{R}$ compatto, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue su $T$, convergente ad una funzione $f$ continua su $T$. Mostrare che, se $f_n(x)\ge f_{n+1}(x)$ per $n\in\mathbb{N}$ e per ogni $x\in T$, la convergenza è uniforme.

∘∘ **1.28** – Sia $\{P_n\}$ una successione di polinomi di grado non superiore a $k$ uniformemente convergente su un compatto connesso $T\subset\mathbb{C}$; mostrare che la funzione limite è un polinomio di grado non superiore a $k$.



**1.29** – Sia $B(A)$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle funzioni a valori complessi limitate su $A$. Se $f\in B(A)$, mostrare che $\sup_{x\in A}|f(x)|$ definisce una norma, rispetto alla quale $B(A)$ risulta essere uno ***spazio di Banach***, cioè uno spazio vettoriale normato completo.

**1.30** – Sia $K\subset\mathbb{R}^n$ compatto, si consideri $C(K)$ con la norma definita in X.1.29 (norma dell'estremo superiore). Mostrare che $C(K)$ è uno spazio di Banach.

## § 2 – Serie di potenze.

**2.1** – Determinare il raggio $r$ di convergenza delle seguenti serie di potenze nel campo complesso:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, (serie esponenziale)

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, (serie del seno)

3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ (serie del coseno)

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, (serie del coseno iperbolico);

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (serie del seno iperbolico);

6) $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, (serie geometrica);

7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{z^n}{n}$, (serie logaritmica)

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$,
(serie binomiale).

**2.2** – Sviluppare in serie di MacLaurin le seguenti funzioni di variabile reale e determinare gli intervalli $I$ di convergenza:

1) $e^x$ 2) $\sin x$ 3) $\cos x$
4) $\operatorname{Ch} x$ 5) $\operatorname{Sh} x$ 6) $\ln(1+x)$
7) $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

**2.3** – Determinare il raggio $r$ di convergenza delle seguenti serie di potenze:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} z^n$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}} \cdot z^n$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n$, $p \in \mathbb{R}^+$ 6) $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n, |q| < 1$

7) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, con $c_{2n+1} = a^{2n+1}, c_{2n} = b^{2n}, a > 0, b < 1$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ con $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (4n-1)(4n+1)}{4^2 \cdot 8^2 \dots (4n)^2}$.

**2.4** – Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$.

**2.5** – Mostrare che se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_n \in \mathbb{C}$, converge assolutamente in un punto $z_0$ della circonferenza del cerchio di convergenza, allora converge assolutamente in ogni punto di tale circonferenza.



**2.6** – Date due serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad a_n, b_n \in \mathbb{C},$$

con raggio di convergenza rispettivamente $r_1$ ed $r_2$, mostrare che la serie prodotto secondo Cauchy ha raggio di convergenza $r \geq \min(r_1, r_2)$.

**2.7** – Sia

$F(a,b,c,z) =$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1) \cdot b(b+1)\dots(b+n-1)}{n! \cdot c(c+1)\dots(c+n-1)} \cdot z^n$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$ (funzione ipergeometrica). Stabilire il raggio di convergenza e studiare la convergenza assoluta sulla circonferenza del cerchio di convergenza.

**2.8** – Data una successione $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ sia convergente, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge per $|z| \leq 1$ eccetto al più $z = 1$, e la convergenza è uniforme in $T_\delta = \{z : |z| \leq 1, |z-1| \geq \delta > 0\}$.

**2.9** – Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ove $a_0 = 0, a_1 = 1$,

$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ per $n \geq 2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
1) Mostrare che per $n \geq 1$ è $|a_n| \leq (2c)^{n-1}$ ove

$c = \max\left(|\alpha|, |\beta|, \frac{1}{2}\right)$ e dedurre che il raggio $r$ di convergenza è diverso da zero.

2) Mostrare che $(1 - \alpha z - \beta z^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z$ per $|z| < r$.

∘∘ **2.10** – Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

1) $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2n)} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$;

2) $z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

Calcolare la somma delle precedenti serie per $z \in \mathbb{R}$ e dedurre che

$$1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} + \ldots = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

**2.11** – Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ è

$$|\exp z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}.$$

Capitolo XI

# INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Nel presente capitolo per "funzione integrabile" si intende integrabile secondo Riemann.

## § 1 – Mètodi di integrazione.

**1.1** – Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\int 6b^2 x^3 \, dx, \; b \in \mathbb{R}$ 2) $\int \sqrt[3]{4ax^2} \, dx, \; a \in \mathbb{R}^+$

3) $\int (5x^3 - 4x^2 + 3x - 2) dx$ 4) $\int \left( \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right) dx, \; c_k \in \mathbb{R}$

5) $\left( \sum_{k=0}^{n} c_k x^{\alpha_k} \right) dx, \; c_k \in \mathbb{R}, \; \alpha_k \in \mathbb{R} - \{-1\}$

6) $\int \frac{\left(\sqrt{3} - \sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{5x}} dx.$

**1.2** – Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx, \; a, b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ 2) $\int 3^x e^x \, dx$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ 4) $\int \frac{dx}{\mathrm{Ch}^2 x}$

5) $\int (\sin 3x)(\cos 5x) dx$ 6) $\int (\cos x)(\cos 3x)^3 dx$

7) $\int \frac{dx}{\sin x}$ 8) $\int \tan^2 x \, dx$

9) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x+1}dx.$

**1.3 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti

1) $\displaystyle\int x\cdot 5^{x^2}dx$ 2) $\displaystyle\int 2^{\sin x}\cdot\cos x\,dx$

3) $\displaystyle\int \mathrm{Sh}^3 x\,\mathrm{Ch}\,x\,dx$ 4) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

5) $\displaystyle\int \mathrm{Sh}^3 x\,dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

7) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{2^x+3}$

9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-\ln x}{x}dx$ 10) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

**1.4 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx,\ f\in C^1(\mathbb{R}),\ f(x)\neq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$

2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ 3) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx.$

**1.5 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \frac{3^{\mathrm{Th}\,x}}{\mathrm{Ch}^2 x}dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2},\quad a\in\mathbb{R}-\{0\}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$ 4) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{16-x^4}}dx$

5) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ 6) $\displaystyle\int x^{n-1}\sin(x)^n dx,\quad n\geq 1$

7) $\displaystyle\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\cdot\sin 2x\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx$ 9) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}.$



**1.6 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$ 2) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx$

3) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}dx,\ a\in\mathbb{R}-\{0\}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{Sh}^2 x+\mathrm{Ch}^2 x}.$

**1.7 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$ 2) $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}dx,\ a\in\mathbb{R}^+-\{0\}.$

**1.8 –** Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx,\ a,b,p,q\in\mathbb{R},\ p^2-4q<0.$$

**1.9 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$ 2) $\displaystyle\int \ln x\,dx$

3) $\displaystyle\int x^n\ln x\,dx,\ n\geq 1$ 4) $\displaystyle\int \arctan x\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$ 6) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

7) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ 8) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$

9) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$ 10) $\displaystyle\int x^2e^x dx$

11) $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}dx$ 12) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$

13) $\displaystyle\int x\arccos x\,dx.$

**1.10 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ 2) $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx$

3) $\displaystyle\int \cos^2(\ln x)dx$ 4) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx,\ a,b\in\mathbb{R}-\{0\}.$

**1.11** – Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$1)\ \int \frac{dx}{\sin^4 x} \qquad 2)\ \int \frac{x}{\sin^2 x}dx.$$

**1.12** – Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$1)\ \int \frac{dx}{(x-a)^n},\ a \in \mathbb{R},\ n \geq 1 \quad 2)\ \int \frac{x}{(1+x^2)^n}dx,\ n \geq 1.$$

**1.13** – Posto

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad n > 1,$$

esprimere $I_n(x)$ mediante $I_{n-1}(x)$.

**1.14** – Calcolare per ricorrenza il seguente integrale indefinito:

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n},\ n > 1,\ p, q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0.$$

**1.15** – Posto

$$J_n(x) = \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx,\ n > 1,$$

$a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$,

mostrare che

$$J_n(x) = \frac{a}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{b - \frac{ap}{2}}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n-\frac{1}{2}}} \cdot I_n(y)$$

dove

$$I_n(y) = \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} \quad \text{e} \quad y = \frac{x+p/2}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}.$$

**1.16** – Ricordando il seguente

TEOREMA – Siano $A(x)$ e $B(x)$ polinomi a coefficienti reali, sia gr $A <$ gr $B$ e sia



$$B(x) = \prod_{i=1}^{h}(x-b_i)^{m_i} \cdot \prod_{j=1}^{k}(x^2+p_jx+q_j)^{n_j}$$

con

$b_i \in \mathbb{R}$, $p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $p_j^2 - 4q_j < 0$, $j = 1, \ldots, k$.

Allora è possibile determinare in un solo modo, per ogni $i = 1, \ldots, h$ delle costanti reali $A_{is}$, $s = 0, \ldots, m_i - 1$, e per ogni $j = 1, \ldots, k$ delle costanti reali $B_{jr}$ e $C_{jr}$, $r = 0, \ldots, n_j - 1$ tali che

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{s=0}^{m_j-1} \frac{A_{is}}{(x-b_i)^{m_j-s}} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=0}^{n_j-1} \frac{B_{jr}x + C_{jr}}{(x^2+p_j+q_j)^{n_j-r}};$$

calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$1)\ \int \frac{2x^5+3x^4-3x^3+8x^2-5x+3}{(x^2+1)^2(x-1)^2}dx$$

$$2)\ \int \frac{2x^2-1}{x^3-2x^2+x-2}dx \qquad 3)\ \int \frac{(x^2+1)}{x^3-4x^2+5x-2}dx$$

$$4)\ \int \frac{x}{x^2-7x+6}dx \qquad 5)\ \int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$$

$$6)\ \int \frac{dx}{(x^4-1)}.$$

**1.17** – Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$1)\ \int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx \qquad 2)\ \int \frac{x^2}{x^2-7x+10}dx$$

$$3)\ \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx \qquad 4)\ \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$$

$$5)\ \int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx.$$

**1.18** – Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$1)\ \int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx \qquad 2)\ \int \frac{dx}{1+x^4}$$

$$3)\ \int \frac{dx}{x^6+x^8}.$$

**1.19 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^{x}}$ 2) $\displaystyle\int \frac{(2+\tan^2 x)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}dx$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^5 x)(\cos^3 x)}$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{Sh}\, x}$ 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ 8) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx.$

**1.20 –** Se $m, n, p \in \mathbb{Q}$, l'integrale $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p dx$ si dice *integrale binomio.*

L'integrale precedente è una combinazione lineare finita di funzioni elementari nei seguenti tre casi:

(i) $p \in \mathbb{Z}$

(ii) $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, in tal caso si usa la sostituzione $a + bx^n = t^s$,

dove $p = \dfrac{r}{s}$;

(iii) $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, in tale caso si usa la sostituzione

$ax^{-n} + b = t^s$ dove $p = \dfrac{r}{s}$.

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 2) $\displaystyle\int x^3(1+2x^2)^{-3/2}dx$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^5}}$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

5) $\displaystyle\int \frac{x^{3/2}}{(2-3x^{1/4})^{1/2}}dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{ax+b}}dx,\ a, b \in \mathbb{R}.$

**1.21 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$



3) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx.$

**1.22 –** Si consideri l'integrale

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

dove $f$ è una funzione razionale di $x$ e $\sqrt{ax^2+bx+c}$ e sia $a \neq 0$.

L'integrale precedente si può sempre calcolare mediante il seguente procedimento di razionalizzazione:

(i) se $a > 0$ si pone $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$

(ii) se $c > 0$ si pone $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx$

(iii) se $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$ e $\alpha$ e $\beta$ sono le radici di

$ax^2 + bx + c = 0$, si pone $a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2$.

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-6x-7}dx$ 2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x}dx$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}.$

**1.23 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int x^2\cos^2 3x dx$ 2) $\displaystyle\int e^{2x}\sin^2 x dx$

3) $\displaystyle\int xe^x\cos x dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$

5) $\displaystyle\int x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$ 6) $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{Sh}\, x dx$

7) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}dx$

9) $\displaystyle\frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}dx$ 10) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}dx$

11) $\displaystyle\int x^2\arctan 3x dx.$

**1.24 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+1)^{3/2}}dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

3) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$ 4) $\displaystyle\int \tan^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx$

5) $\displaystyle\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 3x}dx$

7) $\displaystyle\int x^2 \ln\sqrt{1-x}\,dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{x}{\mathrm{Sh}^2 x}dx$

9) $\displaystyle\int \frac{2^x}{1-4^x}dx$ 10) $\displaystyle\int x\arctan(2x+3)dx$

11) $\displaystyle\int |x|dx$ 12) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx.$

**1.25 –** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}.$

**1.26 –** Calcolare per ricorrenza i seguenti integrali:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x},\ n\ge 2$ 2) $\displaystyle\int \frac{\sin^{n+1}x}{\cos^{m+1}x}dx,\ n\ge 1,\ m\ge 1$

3) $\displaystyle\int x^n \ln^n x\,dx,\ n\ge 1$ 4) $\displaystyle\int \sin^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}$

5) $\displaystyle\int \sin^n x\cos^m x\,dx,\ n,m\in\mathbb{N}$

6) $\displaystyle\int \mathrm{Ch}^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}.$

**1.27 –** Calcolare per ricorrenza i seguenti integrali

1) $\displaystyle\int x^n\sin x\,dx,\ n\ge 0$ 2) $\displaystyle\int x^n e^{-x}dx,\ n\ge 0$

3) $\displaystyle\int (a^2+x^2)^n dx,\ a\in\mathbb{R},\ n\ge 0.$

**1.28 –** Calcolare, usando la definizione di integrale definito:



1) $\displaystyle\int_0^a e^x dx,\ a>0$ 2) $\displaystyle\int_0^a x^3 dx,\ a>0$

3) $\displaystyle\int_0^a \cos x\,dx,\ a>0.$

**1.29 –** Calcolare i seguenti integrali definiti:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$ 2) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\cos^3 x}$

3) $\displaystyle\int_0^3 \left(x-[x]+\frac{1}{2}\right)dx.$

**1.30 –** Calcolare i seguenti integrali definiti:

1) $\displaystyle\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{x-2\sqrt[3]{x+4}}$ 2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}dx$

3) $\displaystyle\int_x^3 \frac{1+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-1}dt,\ x>0.$

**1.31 –** Calcolare i seguenti integrali definiti:

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx,\ n\ge 0$ 2) $\displaystyle\int_0^1 x^n\sin(\pi x)dx, n\ge 0.$

**1.32 –** Sia $f$ limitata e integrabile su ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$, si dice che esiste finito l'integrale generalizzato di $f$ tra $a$ e $+\infty$, se esiste finito $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$ e si pone

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx=\int_a^{+\infty}f(x)dx.$$

Sia $f$ limitata e integrabile su ogni intervallo $[a,b-\varepsilon]$, si dice che esiste finito l'integrale generalizzato di $f$ tra $a$ e $b$, se esiste finito $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to o^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ e si pone

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b_\varepsilon}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Calcolare i seguenti integrali generalizzati:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ 3) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ 5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

**1.33 –** Calcolare i seguenti integrali generalizzati:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+4}$

3) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x+1}}$ 4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

**1.34 –** Stabilire se esistano finiti i seguenti integrali

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\ln(1+\sqrt{x})}$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\ln(1+\sqrt{x})}$ 4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sin\frac{1}{x}}dx$

5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

**1.35 –** Stabilire se esistono finiti i seguenti integrali

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{(1-x^2)^2}\cos\frac{1}{1-x^2}dx$.

## § 2 – Proprietà delle funzioni integrabili.

**2.1 –** Studiare la seguente funzione data in forma integrale

$$f(t) = \int_0^t \ln\left(1 - e^{\frac{x-1}{x^2}}\right)dx.$$



**2.2 –** Studiare, al variare del parametro reale $\lambda$, la seguente famiglia di funzioni date in forma integrale

$$f(x;\lambda) = \int_1^x e^{-\lambda t}\ln t\,dt, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

**2.3 –** Dimostrare che se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è monotona, allora è integrabile.

**2.4 –** Sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}.$$

Mostrare che l'integrale superiore di $f$ sull'intervallo $[0,1]$ è uguale a 1 e che l'integrale inferiore è nullo.

**2.5 –** Determinare il limite della successione $\{x_n\}$, dove

$$x_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2+p^2}.$$

**2.6 –** Siano $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ e $\phi\in\mathcal{C}([a,b])$.
Mostrare che la funzione $g$ così definita

$$g(y) = \int_a^{\phi(y)} f(x)dx$$

è continua su $[a,b]$.
Il risultato precedente è ancora vero se $f$ è solo integrabile sui compatti di $\mathbb{R}$?

**2.7 –** Calcolare $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$, dove

$$f_n(x) = \frac{nx-1}{(x\ln n+1)(1+nx^2\ln n)}, \quad n\in\mathbb{N}-\{0\}.$$

Determinare $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

**2.8 –** Sia $f \in C([a,b])$ e sia $\phi : (c,d) \to (a,b)$ derivabile. Calcolare $F'(y)$ dove

$$F(y) = \int_a^{\phi(y)} f(x)dx.$$

∘ **2.9 –** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni $h, k$ continue su $[a,b]$ tali che per ogni $x \in [a,b]$

$$h(x) \le f(x) \le k(x) \quad \text{e} \quad \int_a^b (k(x) - h(x))dx < \varepsilon.$$

∘ **2.10 –** Siano $f, g \in C([a,b])$ e positive e siano $p, q > 1$ tali che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Mostrare che

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \le \left(\int_a^b \{f(x)\}^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b \{g(x)\}^q dx\right)^{1/q}$$

(Disuguaglianza di Hölder).

∘ **2.11 –** Siano $f, g \in C([a,b])$ e positive e sia $p > 1$.
Mostrare che

$$\left(\int_a^b \{f(x) + g(x)\}^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b \{f(x)\}^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b \{g(x)\}^p dx\right)^{1/p}$$

(Disuguaglianza di Minkowski).

**2.12 –** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile e sia $p \ge 1$.
Mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C([a,b])$ tale che

$$\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|^p dx < \varepsilon.$$



**2.13 –** Sia $f \in C([a,b])$ positiva. Sia

$$I_n = \left(\int_a^b \left\{f(x)\right\}^n dx\right)^{1/n}, \quad n \ge 1.$$

Mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

**2.14 –** Siano $h, g \in C([a,b])$ e sia $A > 0$.
Mostrare che se per ogni $x \in [a,b]$ è

$$|h(x) - g(x)| \le A \int_a^x |h(t) - g(t)|dt$$

allora $h \equiv g$.

**2.15 –** Sia $f \in C([a,b])$ e monotona, con derivata continua e limitata. Mostrare che se $g \in C([a,b])$, esiste $\xi \in (a,b)$ tale che

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

**2.16 –** Siano $f_n$ e $g_n$ definite su $[-1,1]$ nel modo seguente

$$f_n(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt}, \quad g_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Mostrare che $f_n$ e $g_n$ sono polinomi e studiarne la parità.
2) Utilizzando le disuguaglianze

(a) $t(1-t^2)^n \le (1-t^2)^n$ se $0 \le t \le 1$

(b) $(1-t^2)^n \le \frac{t}{x}(1-t^2)^n$ se $0 \le x \le t \le 1$,

mostrare che se $x > 0$ è $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.
Determinare $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ per $x \le 0$.
3) Mostrare che $\{f_n\}$ converge uniformemente su $[\alpha, 1]$ per ogni $\alpha > 0$ e che non converge uniformemente su $[-\alpha, \alpha]$.
4) Mostrare che $\{g_n\}$ converge uniformemente a $g(x) = |x|$ su $[-1,1]$.

## Capitolo XII

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI ELEMENTARI

## § 1 – Equazioni differenziali del I ordine

**1.1 –** Si consideri l'equazione differenziale (lineare del I ordine)

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

dove $P, Q$ sono funzioni continue in un intervallo $I$ (limitato o illimitato).
Detta $A(x)$ una primitiva di $P(x)$ su $I$, mostrare che ogni soluzione ha la forma

$$(1) \qquad y_c(x) = e^{-A(x)}\left\{c + \int e^{A(x)}Q(x)dx\right\}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

**1.2 –** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x) \\ y(a) = b \end{cases}$$

dove $P, Q \in C(I), a \in I, b \in \mathbb{R}, I$ intervallo.
Mostrare che ammette una e una sola soluzione su $I$.

**1.3 –** Data l'equazione

$$xy' + y = x \arctan x,$$

determinarne l'integrale generale per $x < 0$ e per $x > 0$.
Esistono soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$?

**1.4** – Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$(E)\begin{cases} y' + \frac{2}{x}y = \sin x \\ y(-\pi) = 1 \end{cases} \qquad (x > 0)$$

Stabilire poi per quali valori di $\alpha \geq 0$ l'equazione

$$(E_\alpha) \quad y' + \frac{\alpha}{x}y = \sin x$$

ammette soluzioni periodiche di periodo $2\pi$ su $(0, +\infty)$.

∘ **1.5** – Si consideri l'equazione differenziale della forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

dove $P$ e $Q$ sono funzioni continue su un intervallo $I$ (Equazioni di J. Bernoulli).
Determinare le soluzioni non negative.

∘ **1.6** – Si consideri l'equazione differenziale della forma

$$y' + P(x)y = Q(x)\sqrt[r]{y^s},$$

$$r, s \in \mathbb{Z}, \quad r > 0,$$

dove $P$ e $Q$ sono funzioni continue su un intervallo $I$.
Determinare tutte le soluzioni.

**1.7** – Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = \sqrt{y}$$

e tracciare il diagramma delle soluzioni.

**1.8** – Determinare per ciascun valore $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione

$$3xy^2y' = \alpha y^3 + \ln x - 1.$$

Nel caso $\alpha = 2$, determinare le soluzioni di segno costante su $(0, +\infty)$.



**1.9** – Dopo aver risolto il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2xy + xe^{x^2}y^2 = 0 \\ y(0) = b \end{cases} \qquad (b \in \mathbb{R}),$$

stabilire per quali valori di $b$ la soluzione $y(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ e $y(x) \leq 3$.

**1.10** – Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x}y + x^4y^2 = 0 \\ y(1) = b \end{cases} \qquad (b \in \mathbb{R}).$$

Determinare per quali valori di $b$ la soluzione è definita su $(0, +\infty)$.
Determinare per quali valori di $b$ la soluzione è definita almeno su $(0, 2)$.

**1.11** – Si consideri l'equazione differenziale (di Riccati)

(1) $\qquad y' + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x)$

dove $P, Q, R \in C(I)$, $I$ intervallo.
Mostrare che se $\varphi(x)$ è una soluzione su $I$ dell'equazione, ogni soluzione della (1) ha la forma $y(x) = \varphi(x) + u(x)$, dove $u$ è soluzione della seguente equazione di Bernoulli

$$u' + [P(x) - 2\varphi(x)Q(x)]u = Q(x)u^2.$$

**1.12** – Data l'equazione differenziale

$$(1 + x^2)y' - xy + y^2 = 1 + x^2,$$

determinare una soluzione della forma $y = ax + b$. Trovare poi l'integrale generale.

**1.13** – Dopo aver constatato che $y(x) = -1$ è soluzione su $\mathbb{R}$ dell'equazione

$$y' = -xy^2 - (1+2x)y - x - 1,$$

determinarne l'integrale generale.
Verificare che ogni soluzione ammette asintoto orizzontale.
Trovare le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

**1.14** – Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y' = 2 - \frac{y^2}{x^2}$$

e trovare le soluzioni definite almeno su $(2, +\infty)$.

**1.15** – Data l'equazione

$$y' = a(x)y^2 - y + e^{-x},$$

determinare $a(x)$ in modo che $y = e^{-x}$ sia una soluzione.
Determinare quindi l'integrale generale dell'equazione relativa alla funzione $a(x)$ precedentemente trovata e stabilire se ammette soluzioni definite su $[0, +\infty)$.

**1.16** – Si consideri un'equazione differenziale della forma

$$(E) \qquad y' = p(x)q(y)$$

dove $p$ e $q$ sono funzioni continue in due intervalli $I_1$ e $I_2$ rispettivamente (Una tale equazione si chiama a variabili separabili).
L'equazione $(E)$ ha fra le sue soluzione le funzioni $y \equiv c$ dove $q(c) = 0$.
Sia ora $J$ un sottointervallo di $I_2$ ove $q$ non si annulla.
Mostrare che $\varphi(x)$ è soluzione di $(E)$ a valori in $J$ se e solo se soddisfa la relazione

$$(*) \qquad R(\varphi(x)) = P(x) + c$$

per un certo $c$, dove $P$ è una primitiva di $p$ su $I_1$ e $R$ è una primitiva di $\dfrac{1}{q(y)}$ in $J$.



**1.17** – Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2(y-1)}{x(x^2+2x+2)} \\ y(1) = b \end{cases} \qquad (b \in \mathbb{R})$$

su $(0, +\infty)$.
Studiare, per ogni $b \in \mathbb{R}$, crescere e decrescere e codominio della soluzione.

**1.18** – Si consideri un'equazione della forma

$$(E) \quad y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

dove $F$ è una funzione continua su un intervallo $I$. (Equazione omogenea).
Mostrare che ogni soluzione dell'equazione $(E)$ ha la forma $y(x) = xz(x)$ dove $z$ è soluzione della seguente equazione a variabili separabili

$$z' = \frac{F(z) - z}{x}.$$

**1.19** – Determinare per ciascun valore $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione $y_\alpha$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{x}\right)^\alpha + \frac{y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}, \qquad x > 0.$$

Calcolare quindi $\lim_{\alpha \to -\infty} y_\alpha(-\alpha)$.

○ **1.20** – Si consideri un'equazione differenziale della forma

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right),$$

$a, b, c, a_1, b_1, c_1$
Mostrare c[illegible] conducibile ad una equazione a variabili separabili

∘ **1.21** – Si consideri un'equazione differenziale della forma

$$y = xy' + g(y')$$

dove $g$ è di classe $C^1$ su un intervallo $I$. (Equazione di Clairaut).
Ponendo $y' = t(x)$ determinare le soluzioni.
Si risolva quindi l'equazione

$$y = xy' + y'^2 + y'^3.$$

∘ **1.22** – Si consideri un'equazione differenziale della forma

$$y = xf(y') + g(y')$$

con $f$ e $g$ di classe $C^1$ su un intervallo $I$. (Equazione di D'Alembert – Lagrange).
Mostrare che ponendo $y' = p(x)$, per la determinazione delle soluzioni ci si può ricondurre ad una equazione differenziale lineare.
Si risolva quindi l'equazione

$$y = xy'^2 + y'^3.$$

**1.23** – Integrare l'equazione

$$x = y' \cdot e^{y'}.$$

**1.24** – Stabilire per quali $c \in \mathbb{R}$ il seguente problema ammette soluzioni e determinarle

$$\begin{cases} 2y' - cy = 0 \\ y(0) = 1 \\ \int_0^1 y(x)dx = 1 \end{cases}$$



**1.25** – Scrivere il polinomio di Taylor di terzo grado, centrato in $x = 0$, della soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2[\sin(y^2) + 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

**1.26** – Determinare le soluzioni dell'equazione

$$(y')^2 + 9(y)^2 = 9.$$

**1.27** – Determinare le funzioni continue per le quali l'area del trapezoide sotteso dal diagramma nell'intervallo $[a, x]$, è uguale al rapporto tra il cubo dell'ordinata in $x$ e $x$. $(0 < a < x)$.

**1.28** – Si consideri l'equazione differenziale

$$x(x+2)y' + (x+1)y - 1 = 0.$$

Determinare una serie di potenze $\sum a_n x^n$ che sia soluzione dell'equazione e calcolarne il raggio di convergenza.

## § 2 – Equazioni differenziali di ordine superiore

Per gli esercizi di questo paragrafo si presuppongono noti i fondamenti teorici riguardanti le equazioni differenziali lineari.

**2.1** – Data un'equazione differenziale della forma

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

mostrare che con la sostituzione $y' = t(y)$ si trasforma in una equazione di ordine $n - 1$. Determinare quindi l'integrale generale dell'equazione

$$y'' = y^{-\frac{1}{2}}, \qquad y > 0.$$

**2.2 –** Data l'equazione

$$y'' + \alpha y = \beta e^x, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

determinare $\alpha$ e $\beta$ affinché ammetta soluzioni periodiche di periodo $2\pi$; infine determinare tali soluzioni.

**2.3 –** Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 12\sin x + 4\cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

**2.4 –** Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $y = x^a$ è soluzione su $(0, +\infty)$ dell'equazione

$$x^2 y'' - \frac{5}{2} x y' + 3y = 0.$$

Trovare quindi l'integrale generale.

**2.5 –** Si consideri la seguente equazione lineare del secondo ordine

$$(E) \qquad P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = S(x)$$

ove $P, Q, R, S$ sono funzioni continue su un intervallo $I$. Sia $\varphi(x)$ una soluzione su $I$ dell'equazione omogenea associata. Mostrare che operando in $(E)$ la sostituzione

$$y(x) = \varphi(x) z(x)$$

si ottiene una equazione differenziale nella funzione incognita $z$, mancante del termine in $z$.



**2.6 –** Stabilire per quali $m \in \mathbb{R}$ la funzione $y = e^{mx}$ è soluzione su $(0, +\infty)$ dell'equazione

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0.$$

Trovare quindi l'integrale generale della equazione

$$(E) \qquad xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3 e^{2x}.$$

**2.7 –** Data l'equazione differenziale

$$(E) \qquad (1+x^2)y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0,$$

verificare che la funzione

$$(F) \qquad y(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$$

è una soluzione.
Determinare le altre soluzioni dell'equazione.

○○ **2.8 –** Si consideri la seguente equazione differenziale lineare di ordine $n$

$$(E) \quad y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + P_n(x)y = Q(x)$$

dove $P_1, \ldots, P_n, Q$ sono funzioni continue su un intervallo $I$.
Supponiamo che $u_1, u_2, \ldots, u_n$ siano $n$ soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea.
Mostrare che è possibile determinare $n$ funzioni $v_1, \ldots, v_n$ tali che

$$\overline{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(x)$$

sia soluzione di $(E)$.
(Metodo della variazione delle costanti arbitrarie).

**2.9 –** Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = \cos x.$$

**2.10 –** Data l'equazione differenziale

$$|x|y'' + y' = x|x|,$$

determinarne l'integrale generale per $x < 0$ e per $x > 0$.
Trovare le soluzioni dell'equazione di classe $C^2$ definite su tutto $\mathbb{R}$.
Stabilire quindi quale relazione deve sussistere fra $\alpha$ e $\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) affinché esista una soluzione $y \in C^2(\mathbb{R})$ dell'equazione precedente tale che

$$\begin{cases} y(-1) = \alpha \\ y(1) = \beta \end{cases}.$$

**2.11 –** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3xy' + x^2 y = \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

determinare la successione $\{a_n\}$ in modo che

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ne sia soluzione.

○ **2.12 –** Si consideri l'equazione differenziale

$$(E) \qquad (y - x)y'' + (1 + y')(1 + y'^2) = 0.$$

Determinare una funzione $f$ non identicamente nulla tale che l'insieme delle soluzioni dell'equazione $(E)$ sia identico all'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$(E_1) \qquad (y - x)f(y') = a,$$

dove $a$ è una costante arbitraria.
Determinare poi le soluzioni di $(E)$.



**2.13 –** Determinare l'equazione differenziale che ammette come soluzioni le curve della famiglia

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Più in generale costruire l'equazione differenziale che ammette come soluzioni le curve della famiglia

$$F(x, y, a) = 0,$$

dove $F$ ammette derivate parziali continue rispetto a $x$ e $y$.

**2.14 –** Trovare le traiettorie ortogonali di una famiglia di cerchi di raggio costante $R$ ed aventi i centri sopra una retta.
(Le traiettorie ortogonali di una famiglia di curve $s$, $F(x, y, c) = 0$, sono le curve che incontrano ad angolo retto tutte le linee della famiglia).

# PARTE II

Capitolo I

# PRELIMINARI

## § 1 – Insiemi. Operazioni sugli Insiemi. Applicazioni

○ **1.8** – Mostrare che:

a) $(A \cap B) \div C = (A \cap B \cap C^C) \cup (C \cap A^C \cap B^C) \cup [C \cap (A \div B)]$,

b) $(A \div C) \cap (B \div C) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A^C \cup C^C) \cap (B^C \cup C^C)$,

c) $(A \cap B \cap C^C) \cup (C \cap A^C \cap B^C) \subset (A \div C) \cap (B \div C)$,

d) $[C \cap (A \div B)] \cap [(A \div C) \cap (B \div C)] = \emptyset$.

Tenere presente I.1.7.

○ **1.16** – Vedi I.1.15.

**1.24** – Vedi I.1.22.

## § 2 – Simbolo di sommatoria, simbolo di prodotto Dimostrazione per induzione.

**2.5** – $qs_n - s_n = q^{n+1} - 1$, oppure eseguire la divisione.

**2.6** – Sommare a due a due i termini equidistanti degli estremi.

**2.7** – Vedi I.2.6

**2.12** – $1 - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{k-1}{k} \cdot \dfrac{k+1}{k}$ e usare I.2.10.

**2.14** – Per induzione oppure ponendo

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

**2.15** – Per induzione.

∘ **2.16** – Per induzione, usando le formule di prostaferesi.

∘ **2.17** – Per induzione.

**2.18** – Per induzione.

## § 3 – Elementi di analisi combinatoria

**3.8** – Per induzione.

**3.9** – Per ricorrenza della formula di Stiefel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

oppure per induzione.

∘ **3.10** – Considerare l'identità

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n,$$

oppure per induzione o con ragionamento combinatorio.

∘∘ **3.14** – $q!(q+2)! > [(q+1)!]^2$.

**3.15** – Vedi I.3.13.

**3.16** – 1) $q_2$ può assumere solo i valori 0 e 1.



∘∘ **3.18** – Per induzione da $n-1$ a $n$ usando

$$C_{2n,n} = C_{2n-1,n} + C_{2n-1,n-1}.$$

## § 4 – Campo razionale e campo reale

**4.7** – Vedi I.4.6.

∘ **4.11** – Suddividere l'intervallo $0 \le x \le 1$ in $n$ parti uguali e considerare

$$\text{mant }(ka), k = 1, 2, \ldots, (n-1).$$

∘ **4.16** – Indichiamo gli insiemi con $A_h, h = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, e con $A_{hj}$ lo $j$–esimo elemento di $A_h$. È utile considerare la seguente tabella:

$$\begin{array}{ll}
A_1 & a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \ldots \\
A_2 & a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots \\
A_3 & a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3n}, \ldots \\
\cdots & \cdots \\
A_h & a_{h1}, a_{h2}, a_{h3}, \ldots, a_{hn}, \ldots \\
\cdots & \cdots
\end{array}$$

**4.17** – Vedi I.4.16.

∘∘ **4.18** – $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, $\mathbb{Q} = \{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$. $A_0 = \{a_{k_0}\}$ ove $k_0 = 0, \mathbb{Q}_0 = \{q_0\}, f_0 : A_0 \to \mathbb{Q}_0$;

$$A_1 = \{a_{k_0}, a_{k_1}\}, \quad \mathbb{Q}_1 = \{q_0, q_1\},$$

$a_{k_1}$ è il primo elemento in $A$ che con $a_{k_0}$ è nella stessa relazione d'ordine di $q_1$ con $q_0, f_1 : A_1 \to \mathbb{Q}_1, f_1(a_{k_i}) = q_i, i = 0, 1$.

$$A_2 = \{a_{k_0}, a_{k_1}, a_{k_2}\}, \quad \mathbb{Q}_2 = \{q_0, q_1, q_2\},$$

$a_{k_2}$ è il primo elemento in $A$ che con $a_{k_0}$ e $a_{k_1}$ è nella stessa relazione d'ordine di $q_2$ e $q_1, f_2 : A_2 \to \mathbb{Q}_2, f_2(A_{k_i}) = q_i$, $i = 0, 1, 2$.

Nello stesso modo si costruiscono $A_n, \mathbb{Q}_n, f_n$.

**4.22** – Tenere presente I.4.20

**4.23** – Si ricordi che per $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ è $\frac{2}{\pi}x \le \sin x < x$.

∘ **4.24** – Posto $[\alpha] = a$ scrivere $\alpha = a + \frac{h}{n} + \frac{\rho}{n}, 0 \le h \le n-1, 0 \le \rho < 1$, $h$ intero.

∘ **4.26** – Usare I.4.25.

## § 5 – Disuguaglianze

**5.5** – Per induzione.

**5.6** – Per induzione oppure motiplicando per

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}.$$

**5.7** – Usare I.5.5 per 1,2.

Per la 3) usare $\qquad \frac{1}{1-\alpha} > 1 + \alpha.$

Per la 5) mostrare che:

$$\left\{\left(1 + \frac{\alpha}{mn}\right)^n\right\}^m > \left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^m, \left\{\left(1 - \frac{\alpha}{mn}\right)^m\right\}^n >$$
$$> \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$



**5.8** – Usare I.5.7.
Dimostrare la 7) tenendo presente che

$$\left(1 + \frac{\alpha/k}{m/k}\right)^{m/k} \cdot \left(1 - \frac{\alpha/k}{n/k}\right)^{n/k} < 1$$

e ricavare le rimanenti.

∘∘ **5.9** – Dimostrare la 7) di I.5.8 costruendo opportune coppie di classi contigue di razionali sfruttando le seguenti disuguaglianze:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{s}\right)^s < \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^r$$
$$\left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^s < \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^r \text{ per } \alpha > 0, 0 < s < r \text{ razionali.}$$

**5.10** – Porre nella 7) di I.5.8 in luogo di $\alpha$,

$$\frac{\mu\nu(x-y)}{\mu x + \nu y}.$$

**5.11** – Considerare il cerchio trigonometrico e calcolare le aree del settore circolare di arco $a$, e dei triangoli di base 1 e altezza rispettivamente $\sin a$ e $\tan a$.

**5.12** – Vedi I.5.7.

∘∘ **5.13** – Posto

$$A = \left\{\sum_{i=1}^N a_i^p\right\}^{1/p} \qquad e \qquad B = \left\{\sum_{i=1}^N b_i^q\right\}^{1/q}$$

applicare la I.5.10 a $\displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B}$

con $\frac{1}{p} = \mu \quad$ e $\quad \frac{1}{q} = \nu$.

**5.14** – Vedi I.5.13.

**5.15** – Vedi I.5.10.

**5.16** – Per induzione usando I.5.15.

∘ **5.17** – Vedi I.5.16.

∘ **5.18** – Porre in I.5.17 $a_i = \dfrac{i+1}{i}$.

∘ **5.19** – Da $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{1+\alpha} > 1 + \dfrac{1+\alpha}{k}$,

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^{1+\alpha} > 1 - \frac{1+\alpha}{k}, \quad (\text{I.5.9}),$$

moltiplicando per $k^{1+\alpha}$ ricavare una limitazione per $k^{\alpha}$.

∘∘ **5.20** – 1) e 2) per induzione.
Per la 3) osservare che $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ è intero.

## § 6 – Disequazioni

**6.9** – Porre $\sqrt[3]{x} = t$.

**6.19** – Porre $\operatorname{Sh} x = t$.

**6.22** – Porre $\sqrt{x} = t$.

# Capitolo II
# CAMPO COMPLESSO

## § 1 – Operazioni sui numeri complessi

**1.2** – $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ ; $(1-i)^n = \overline{(1+i)^n}$.

**1.8** – Elevare al quadrato.

**1.10** – Usare la formula di De Moivre e lo sviluppo della potenza del binomio.

**1.12** – Per induzione.

**1.17** – Scomporre $\alpha^n - \beta^n$.

∘∘ **1.18** – Sfruttare le identità

1) $0 = (1-1)^n = a_n - b_n + c_n - d_n$
2) $2^n = (1+1)^n = a_n + b_n + c_n + d_n$,
3) $|1+i|^{2n} = 2^n = (a_n - c_n)^2 + (b_n - d_n)^2$.

La dimostrazione può essere effettuata anche per induzione, stabilendo l'identità $a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n = 4^{n-1}$, (Reutter), mediante la quale si dimostra anche l'identità

$$a_n a_{n+1} + b_n b_{n+1} + c_n c_{n+1} + d_n d_{n+1} = 2^{n-1}(2^n + 1) \quad \text{(Carliz)}$$

∘ **1.19** – Giungere all'assurdo da considerazioni sul segno di $i$.

## § 2 – Equazioni e identità nel campo complesso

**2.13** – $\left|\dfrac{1+i\cdot z}{1-i\cdot z}\right| = 1.$

**2.14** – Se $z = \rho\exp(i\alpha), \alpha \neq k\pi$, è $\dfrac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} = \operatorname{cotn}\alpha.$

**2.17** – Passare ad un sistema di due equazioni scindendo parte reale e parte immaginaria.

**2.20** – Scomporre $z^n - a$.

∘ **2.21** – $\omega = \exp\left(\dfrac{2\pi}{n} i\right), z_k = z_1\omega^{k-1}$ e ricordare I.2.5.

∘ **2.22** – 1) Considerare $\prod_{k=1}^{n-1}\left(\exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right) - z\right) = P(z).$

2) $P^2 = S^2 \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left\{-4\exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)\right\}$ e ricordare II.2.20.

**2.23** – $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{2}{2-z_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{4-z_k}{2-z_k}\right)$ e vedi II.2.22.

∘ **2.24** – Sostituire l'espressione di $b_q$ in $a_p$ e usare II.2.21.

∘ **2.25** – Raccogliere $\exp\left(-i\dfrac{xu}{2}\right)$.

∘ **2.26** – Sviluppare il secondo membro.

## § 3 – Trasformazioni sul piano complesso

**3.3** – Operare la traslazione $w = z - z_3$.



**3.8** – Vedi II.3.2.

**3.13** – Eseguire la divisione

$$\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}.$$

∘ **3.14** – Mostrare che le trasformazioni elementari mutano cerchi o rette in cerchi o rette e applicare II.3.13.

∘ **3.16** – Mostrare che esiste un'unica trasformazione (invertibile) che muta tre punti distinti fra loro in $0, 1, \infty$ ordinatamente.

**3.17** – L'asse reale deve essere mutato in sé.

**3.18** – Ricavare $z'$.

Capitolo III

# SUCCESSIONI NUMERICHE

## § 1 – Limiti delle successioni. Simboli $\sim o(\cdot), O(\cdot), \asymp$. Classe limite.

**1.2** – Per il 3) tenere presente i risultati di 1) e 2).

**1.3** – Si veda I.5.11.

**1.5** – 2) $\cos\frac{1}{m} - \cos\frac{1}{n} = -2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\cdot\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$;

$|\sin x| \le |x|$.
(Vedi I.5.11).

**1.12** – Indichiamo con $a_n$ l'elemento della successione:

1) $a_n = \sqrt{n}(1 - n^{-1/6})$;

3) $a_n = \dfrac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$;

6) $a_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^4$;

7) $a_n = \dfrac{n!}{n!(n+1-1)}$;

9) $|a_n| < \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$;

10) $a_n = n \cdot \dfrac{1 - \left(1 - \dfrac{a}{n}\right)\left(1 \dfrac{b}{n}\right)}{1 + \sqrt{\left(1 - \dfrac{a}{n}\right)\left(1 - \dfrac{b}{n}\right)}}$;

13) $\left|\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right| < 1$ per $x \neq 0$;

14) $\dfrac{n+1}{n^2+2} \to 0$;

16) $a_n = c\sqrt[n]{1+c^{-2n}}$ per $c > 1$,

$a_n = \dfrac{1}{c}\sqrt[n]{1+c^{2n}}$ per $0 < c < 1$,

$a_n = \sqrt[n]{2}$ per $c = 1$.

**1.13** – Ricordare il comportamento di $\ln n, n^k, e^n, n!$ per $n \to +\infty$.

1) $a_n = 8\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^3}{e^{n/2}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$;

3) $a_n = \dfrac{n!\left(1 - \dfrac{e^n}{n!}\right)}{n^{10}\left(1 + \dfrac{\ln n}{n^{10}}\right)}$;

4) $a_n = \dfrac{(n-1)!\ln n}{e^n} \cdot \dfrac{\left(1 - \dfrac{n^3}{n!\ln n}\right)}{\left(1 + \dfrac{n}{e^n}\right)}$;

5) $\dfrac{n!\ln n}{n^{n+1}} \to 0$;

6) $\ln a_n = \dfrac{1}{n}\ln n$;

8) $1 < \left(n + 1 + n\cos n\right)^{\frac{1}{2n+n\sin n}} < (2n+1)^{\frac{1}{n}}$.



**1.14** –

1) $a_n = 3 \cdot \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)}{\dfrac{3}{n}}$;

4) $a_n = \left\{\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-n}$;

5) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to e^{-1}$;

8) $a_n = n \cdot \dfrac{n+1}{n^2+1}\ \dfrac{3^{\frac{n+1}{n^2+1}} - 1}{\dfrac{n+1}{n^2+1}}$;

11) $a_n = n^{\dfrac{1}{\ln n}}\ n^{n\left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)} \cdot \dfrac{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{\ln n}}}{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{1+n}}}$.

**1.17** – 12) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \ln n + c + \varepsilon_n$ ($\varepsilon_n \to 0, c$ costante),

(Formula di Eulero–Mascheroni).

13) Vedi I.5.19.

**1.18** – $\log_{a_n} b_n = \dfrac{\ln b_n}{\ln a_n}$.

**1.19** – 1) Vedi I.2.6; 2) vedi I.2.6 e I.2.7;

2) $a_n = n\, e^{\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{\ln n}{n}} - (n + a\ln n)$.

**1.20** – 1) $\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}} < \dfrac{2n+1}{n}$.

**1.21** – 1) $1 + \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-1}{k}$; 3) da 1) e 2) oppure vedi I.2.12.

**1.22** – $\left(1 + \dfrac{\theta n}{a_n}\right)^{a_n} = \left\{\left(1 + \dfrac{\theta n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{\theta_n}}\right\}^{\theta_n}$ per $\theta_n \neq 0$.

**1.26** – Usare I.5.11.

**1.28** – 5) $b_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n}+\ln n}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}} =$

$$= e^{\frac{1}{\sqrt{n}+\ln n}} - 1 + 1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

**1.29** – 6) $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{\delta_n}, \delta_n \to 0$
(formula di De Moivre–Stirling).

**1.33** – 1) $a_n = 0$ per $n \equiv 0 (\bmod 3)$, $a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ per $n \equiv 1, 2 (\bmod 6)$,

$a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ per $n \equiv 4, 5 (\bmod 6)$,

3) $\ln(n+1) - \ln n \to 0$ per $n \to +\infty$;

4) Vedi punto 3).

**1.35** – 2) $\exp\left(i + \frac{n\pi}{k}\right) = \exp\left(\frac{in2\pi}{2k}\right)$;

3) porre $r = \frac{p}{q}$, $p$ e $q$ primi fra loro.

**1.36** – Si ricordi II.2.1 e si usino III.1.24 e III.1.31.

**1.37** – Usare II.2.7, II.2.8 e III.1.36.

## § 2 – Successioni ricorrenti

**2.5** – Se esiste il limite $L$ di $a_n$ è $L = \sqrt{2+L}$.

**2.6** – Vedi III.2.5.

**2.8** – Vedi III.2.7.

**2.10** – Vedi I.2.9.



∘ **2.11** – Considerare la $a_n$ per $x \geq 1$ e la $b_n$ per $0 < x < 1$.

## § 3 – Complementi sui limiti di successioni

**3.3** – $a_n + a_{n+1} + a_n + a_{n+2} \to \nu + \nu_1$.

∘ **3.8** – $|t_n - a| \leq \frac{|a_1 - a|}{n} + \frac{|a_2 - a|}{n} + \ldots + \frac{|a_{\overline{n}} - a|}{n} +$

$$\frac{+|a_{\overline{n}+1} - a|}{n} + \ldots + \frac{|a_n - a|}{n}$$

con $\overline{n}$ opportuno.

**3.9** – Considerare $\ln q_n$ e applicare III.3.8.

∘∘ **3.10** – $\sigma_n = A_n + B_n$ ove $B_n = \frac{1}{2^n}a_1 + \frac{1}{2^{n-1}}a_2 + \ldots \frac{1}{2^{n-n_1}}a_{n_1+1}$
con $n_1$ opportuno (vedi III.3.8).

∘ **3.11** – Posto $p_0 = 1,\ p_1 = (1+1)^1, \ldots, p_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,
considerare $p_0 \cdot p_1 \ldots p_{n-1}$ e applicare III.3.9.

∘ **3.12** – Utilizzare il limite trovato in III.3.11.

**3.13** – Vedi III.3.11.

**3.14** – Vedi III.3.9.

∘∘ **3.15** – $\{\exp(i\,n)\} = \{\cos n + i \sin n\}$ assume infiniti valori tutti diversi tra loro al variare di $n$ (vedi I.4.12); mostrare che $z = 1$ è un valore limite ed effettuare opportune rotazioni.

∘∘ **3.16** – $L = \lim_{n\to+\infty} \sup t_n, \quad l = \lim_{n\to+\infty} \inf t_n$.
Se $L > l$, $\{t_n\}$ per passare da un intorno di $L$ ad un intorno di $l$ decresce vincolato dalla $\{\varepsilon_n\}$.

○ **3.17** – Vedi dimostrazione di III.3.8.

○○ **3.18** – Porre $b_n = \ln \frac{P_n}{P_{n-1}}$, $a_n = \frac{p_n}{P_n}$ e usare III.3.17 ($P_\circ = 1$).

Capitolo IV

# SERIE NUMERICHE

## § 1 – Determinazione del carattere di serie numeriche

**1.2** – Per il 1) e 2) vedi IV.1.1.

**1.3** – $\frac{1}{m^2 - n^2} = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{m+n} - \frac{1}{n-m}\right)$.

**1.4** – $\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n+1}$
e usare IV.1.1.

**1.5** – Passare ai logaritmi in I.2.12.

**1.7** – Vedi I.2.5.

**1.8** – $|\sin\theta| \le \theta$ per $\theta \in \mathbb{R}^+$; usare IV.1.7.

**1.9** – Vedi III.1.6 per $s \le 1$ e IV.1.2 per $s \ge 2$.

**1.10** – Vedi IV.1.9.

**1.11** – 2) vedi IV.1.9.
9) distinguere i casi $x \le 0$ e $x > 0$.

○ **1.12** – Considerare $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ove

$$b_n = \frac{1}{(2^{n-1})^s} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^s} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^s}.$$

○ **1.16** – Nel caso $p=1$ considerare $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$, ove

$$b_n = \frac{1}{2^{n-1}\ln^q 2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)\ln^q(2^n-1)}.$$

○○ **1.17** – Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ove

$$b_n = a_{k^{n-1}} + a_{k^{n-1}+1} + \ldots + a_{k^n-1}.$$

**1.18** – Vedi IV.1.12 e IV.1.16.

**1.19** – Usare criteri del rapporto e della radice.
Per 5) vedi III.3.12.

**1.20** – 7) vedi III.1.24; 8) vedi III.3.11.

**1.21** – 2) Valutare $u_{n+1}-u_n$;

3) $\dfrac{\ln n}{\ln^2 n - 1} = \dfrac{\ln n - 1}{\ln^2 n - 1} + \dfrac{1}{\ln^2 n - 1}$.

○ **1.22** – 1) $(-1)^n u_n = \dfrac{(-1)^n}{4\,n} - \dfrac{1-(-1)^n}{8\,n}$;

2) usare la formula di Eulero–Mascheroni;

3) $(-1)^n u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}} - \dfrac{1-(-1)^n}{n(n-1)}\sqrt{n}$.

**1.25** – 1) la serie è a segni alternati;

2) $|\sin\alpha| \le \alpha$;

3) Considerare $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ ove:

$$b_0 = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9},$$

$$b_n = \frac{1}{10n} + \frac{1}{10n+1} + \ldots + \frac{1}{10n+9}.$$

**1.27** – 3) vedi I.5.19.



○ **1.28** – Mostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n^2+a^2}\cdot\pi\right)$$

è definitivamente a segni alternati.

## § 2 – Criteri, proprietà e operazioni sulle serie

**2.2** – Usare il criterio di Cauchy.

**2.3** – Applicare l'identità I.2.8. a $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k$.

**2.4** – Usare I.5.13 con $p=q=2$.

○ **2.5** – Per 3) usare IV.1.1.

**2.6** – Nel secondo caso mostrare che

$$\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n} \ge \frac{a_{n-1}}{2\sqrt{r_{n-1}}}.$$

**2.7** – Usare I.5.13 con $p=q=2$.

**2.8** – Usare I.5.4 e IV.2.7.

**2.9** – Usare I.5.13.

**2.10** – Per ogni $\varepsilon>0$ esiste $N$ tale che per $n>N$ è

$$\frac{a-\varepsilon}{n} < b_n < \frac{a+\varepsilon}{n}.$$

Usare la formula di Eulero–Mascheroni.

○ **2.11** – Ricordando che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

dimostrare che

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n^2}.$$

○ **2.12** – Costruire una serie di cui

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} - \ln \ln (n+1)$$

è la somma parziale (vedi IV.2.11).

○○ **2.13** – Mostrare, usando I.5.9, che

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \frac{(k+1)^\alpha}{1+\alpha} - \frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha} \le \frac{1}{k^\alpha}$$

mostrare la convergenza di

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

**2.15** – Mostrare, usanfo la K.5.4, che rer $n$ pari e $k$ intero fra 0 e $n$ è

$$(k+1)(n-k+1) < \left(\frac{n}{2}+1\right)^2.$$

○ **2.17** – Posto $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $t_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, mostrare sviluppando $t_n$ che $t_n \le s_n$ e da

$$t_n \ge 1 + x + \ldots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)x^m$$

per $n > m$, dedurre che $e^x \ge s_m$.

○○ **2.19** – Supporre $e = \frac{p}{q}, p, q$ interi positivi, e applicare IV.2.18 con $n = q$.



**2.20** – 2) Valutare $S_{3k}$; 3) Valutare $S_{2k}$.

○ **2.21** – Valutare la somma parziale $S_{k(p+q)}$ della seconda serie usando la formula di Eulero-Mascheroni.

○ **2.22** – Raggruppare opportunamente termini positivi e termini negativi.

## § 3 – Altri criteri. Metodi di sommazione. Somme infinite. Prodotti infiniti.

**3.1** – Usare I.2.8.

**3.2** – Usare IV.3.1.

**3.2** – Usare IV.3.1. e IV.3.2.

○ **3.4** – Per a) usare il criterio del rapporto confrontando con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad 1 < s < k$$

e ricordando che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1 \le \frac{s\sigma}{n}$ definitivamente, con $\sigma > 0$.

Per b) confrontare con la serie armonica.

○ **3.5** – Vedi IV.3.4.

○ **3.6** – Applicare il criterio del rapporto confrontando con

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

**3.7** – Per $s > r$, $s < r$, $s = r$ e $a_0 > b_0$, $s = r$ e $a_0 < b_0$ usare il criterio del rapporto.
Per $s = r, a_0 = b_0$ e $a_0 + a_1 \ne b_1$ usare IV.3.5, se $a_0 + a_1 = b_1$ usare IV.3.6.

**3.8** – Usare IV.3.7.

**3.9** – Usare IV.3.7.

∘ **3.10** – I termini con denominatore di $k$ cifre, non aventi lo 0 come prima cifra e non contenenti il 9 sono $9^k - 9^{k-1}$.

**3.13** – Usare IV.3.12 con $p_{nh}$ opportuni.

**3.14** – $H_n^{k-1} = (n+1)H_n^k - nH_{n-1}^k = o(n)$.

∘∘ **3.15** – a) Per induzione su $k$, usando I.2.9 e I.3.9.
b) Usare IV.3.12.

**3.16** – Considerare gli insiemi

$\Omega_1 = \{j \in \Omega : f(j) \geq 1\}$ e

$$\Omega_n = \left\{ j \in \Omega : \frac{1}{n} \leq f(j) < \frac{1}{n-1} \right\},\ n > 1.$$

**3.18** – Sommare sulle parti finite del tipo

$Q_k = \{(n,m) : 1 \leq n \leq k,\ 1 \leq m \leq k\}$ (cioè sui quadrati).

∘ **3.19** – Valutare $\displaystyle\sum_{(n,m)\in P_k} \frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha}$, dove $P_k$ è il contorno del quadrato di semi–lato $k$. Quindi valutare la somma sull'intero quadrato di semi–lato $k$.

**3.20** – Se $\Gamma$ è un sottoinsieme finito di $\Omega$ è:

$$\sum_{j\in\Gamma} f(j) = \sum_{j\in\Gamma} f^+(j) - \sum_{j\in\Gamma} f^-(j).$$

**3.21** – In base a IV.3.17 basta verificare che $s' = s''$ dove

$$s' = \sup_{\Gamma\in\mathcal{P}^*(\mathbb{N})} s_p \text{ e}$$

$$s'' = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \quad \Big( S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \Big).$$

**3.22** – Si tengano presenti IV.3.20 e IV.3.21.



**3.26** – Considerare $\ln P_n$.

**3.27** – Vedi IV.2.17. La seconda parte per induzione, considerando l'uguaglianza $p_{k+1} - 1 = (p_k - 1)(1 + u_{k+1}) + u_{k+1}$.

**3.28** – Vedi IV.3.25 e IV.3.27.

Capitolo V

# SPAZI METRICI E TOPOLOGICI

## § 1 – Spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$. Spazi vettoriali normati

**1.1** – $\| \underline{x} \|^2 = (\underline{x}|\underline{x})$.

**1.4** – Per 3) usare I.5.14.

∘ **1.7** – Usare V.1.1.

**1.13** – Considerare i razionali contenuti in $A$.

**1.15** – Costruire una opportuna copertura di $T$ e sfruttarne la compattezza.

∘ **1.17** – Porre $m\alpha + n\beta = \beta(m\gamma + n)$, $\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta}$, e procedendo come in III.3.15 mostrare che l'insieme $\{m\gamma - [m\gamma]\}$ ha un punto di accumulazione in 0, e quindi che l'insieme $\{m\gamma + n\}$ è denso in $[0, 1]$.

**1.19** – Per assurdo ricordando che i chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$ sono compatti.

**1.23** – Fruttare la convessità.

**1.24** – Vedi V.1.23.

∘∘ **1.25** – Mostrare che $C^c$ è aperto, sfruttando la rappresentazione in base 3 dei numeri reali.

○○ **1.26** – Considerare la rappresentazione binaria dei numeri di $[0,1]$.

○ **1.27** – Vedi V.1.25.

## § 2 – Spazi metrici e spazi topologici

**2.3** – Vedi V.1.9.

**2.13** – Vedi I.4.16.

○ **2.14** – Fissato $\delta > 0$ e $x_1 \in X$, scegliere $x_{j+1} \in X$, se possibile, tale che $d(x_1, x_{j+1}) \geq \delta$ per $i = 1, 2, \ldots, j$.. Mostrare che per ogni $\delta$ le scelte possibili sono in numero finito. Porre $\delta = \dfrac{1}{n}$ ed usare I.4.16.

○ **2.15** – Considerare la famiglia $\mathcal{V}$ di tutti gli intorni aperti con raggio razionale e centro nei punti di un sottoinsieme $A$ denso in $X$ e numerabile.

○○ **2.16** – Sia $\mathcal{V}$ la famiglia numerabile di intorni definita in V.2.15 e sia $\mathcal{G}$ una copertura aperta di $X$; si consideri

$$\overline{\mathcal{V}} = \{V : V \in \mathcal{V}, \text{ esiste } G \in \mathcal{G} \text{ con } V \subset G\}.$$

**2.17** – Sia $E \subset X, E$ infinito; supporre, per assurdo, che ad ogni punto di $X$ si possa associare un intorno contenente un numero finito di punti $E$.

**2.18** – Mostrare che una successione di Cauchy non può avere più di un valore limite. Usare poi V.2.17.

○ **2.19** – Usare V.2.14 e V.2.16.

**2.23** – Vedi V.1.8.

Capitolo VI

# FUNZIONI, LIMITI DI FUNZIONI

## § 1 – Prime proprietà delle Funzioni

**1.21** – Per induzione.

○ **1.24** – Dimostrare la proposizione per $x \in \mathbb{Q}$.

○○ **1.25** – Se $f(1) \neq 0$, allora $f(1) = 1$; in questo caso mostrare che $f(q) = q$ per $q \in \mathbb{Q}$ e, utilizzando il fatto che ogni numero reale positivo è un quadrato, mostrare che $f$ è strettamente crescente.

○ **1.26** – Vedi VI.1.25.

○ **1.28** – Poichè

$$g_k(a) = \frac{f(ka)}{f(k)}, \quad g_k(b) = \frac{f(kb)}{f(k)}, \quad g_k(ab) = \frac{f(kab)}{f(k)},$$

l'uguaglianza $g_k(ab) = g_k(a) \cdot g_k(b)$ è dimostrata se vale la seguente $f(k) \cdot f(kab) = f(ka) \cdot f(kb)$.

## – Limiti di funzioni

**2.2** – 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{v}{\tan v}=1$;

5) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}$;

10) porre $x = 2+t$.

**2.3** – 5) $\dfrac{x^x - x}{1-x-\ln x} = \dfrac{x\left(e^{(x-1)\ln x}-1\right)}{1-x-\ln x}$.

**2.4** – 2) $\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x} = -2\sin\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{2}$;

3) $\arctan a - \arctan b = \arctan\dfrac{a-b}{1+ab}+h\pi$ con $h$ intero opportuno;

6) porre $1-2^x = u$;

7) vedi IV.2.17.

**2.5** – 1) $\dfrac{\pi}{2}-\arctan x = \operatorname{arccot} x = \arctan\dfrac{1}{x}$.

**2.7** – 1) Raccogliere $\max(a,b)$; 2) raccogliere $\min(a,b)$;

3) passare ai logaritmi.

**2.16** – Se $a < +\infty$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{x}$ tale che per $x \ge \overline{x}$ è $a-\varepsilon < f(x+1)-f(x) < a+\varepsilon$, quindi poichè $h \le f(x) \le k$ per $\overline{x} \le x \le \overline{x}+1$, è $h+n(a-\varepsilon) < f(x+n) < k+n(a+\varepsilon)$ per $\overline{x} \le x \le \overline{x}+1$.

∘ **2.18** – Sia $l(a)$ il limite di $f(x)$ per $x \to a$. Detto $E_m$ l'insieme dei punti $a$ ove $\left|f(a)-l(a)\right| > \dfrac{1}{m}$, mostrare che $E_m$ è al più numerabile.

∘ **2.19** – Vedi VI.2.7.

# Capitolo VII

# CONTINUITÀ

## § 1 – Continuità delle funzioni

∘∘ **1.12** – Tenere presente che, fissato $q \in \mathbb{N}-\{0\}$, i numeri della forma $\dfrac{p}{q}$ distano fra loro per non meno di $\dfrac{1}{q}$.

∘ **1.18** – Per la condizione di Cauchy ad ogni $\varepsilon > 0$ si può coordinare $R > 0$ tale che per ogni $\| \underline{x} \| > R$ e $\| \underline{y} \| > R$ si abbia $\| f(\underline{x}) - f(\underline{y}) \| < \varepsilon$.
Considerare le sfere di raggio $R$ e $2R$.

∘ **1.19** – Ad ogni $\varepsilon > 0$ si può coordinare $R > 0$ tale che per $\| \underline{x} \| > R$ si abbia $\| f(\underline{x}) - g(\underline{x}) \| < \varepsilon/3$..
Procedere quindi in modo analogo a VII.1.18.

## § 2 – Proprietà delle funzioni continue in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$

**2.2** – Vedi VII.2.1.

**2.3** – Considerare $F(x) = f(x) - x$.

**2.5** – Le funzioni monotone hanno solo discontinuità di prima specie.

**2.6** – Si vedano VI.1.7 e VII.2.5.

**2.7** – Considerare $F_n(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ su $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

∘∘ **2.9** – Ad ogni $x \in [a,b]$ si associ una coppia $(p,q)$ di razionali tali che $p < x < q$ e per $p < t < q$ sia $f(t) \geq f(x)$.

∘ **2.10** – Fissati $x_o, x_1 \in (a,b)$ con $x_1 < x_o$, per ogni $x > x_o$ è $f(x) \geq r(x)$ ove $r(x)$ è la retta congiungente $(x_1, f(x_1))$ e $(x_o, f(x_o))$, infatti se per $x = \overline{x} > x_o$ fosse $f(\overline{x}) < r(\overline{x})$, il punto $(x_o, f(x_o))$ sarebbe al di sopra della retta congiungente $(x_1, f(x_1))$ e $(\overline{x}, f(\overline{x}))$, contro l'ipotesi della convessità.

**2.13** – Usare l'uniforme continuità di $f$.

**2.14** – Usare V.1.13.

∘ **2.15** – Sia $E$ l'insieme dei punti $x$ per i quali $\lim_{t \to x^-} f(t) < \lim_{t \to x^+} f(t)$. A ciascuno di questo punti si associ una coppia $(p,r)$ di razionali nel modo seguente: $\lim_{t \to x^-} f(t) < p < \lim_{t \to x^+} f(t)$ ed $r$ tale che per $r < t < x$ sia $f(t) < p$. Mostrare che ciascuna coppia è associata ad al più un punto di $E$.

**2.18** – Vedi VI.1.24.

## § 3 – Continuità in spazi più generali (metrici, topologici)

**3.1** – Vedi V.2.23.
Per 2) usando II.2.26 mostrare che $|(\underline{x}|\underline{y})| \leq \|\, \underline{x} \,\| \cdot \|\, \underline{y} \,\|$.

**3.2** – Usare I.1.24.

**3.4** – Osservare che $g(x) > 0$ per $x \neq 1$ e che $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0^+$.



**3.6** – Vedi VII.3.5.

**3.7** – Se $f(x)$ non è monotona allora esistono $x_1, x_2, x_3$ con $x_1 < x_2 < x_3$ e $f(x_1) \geq f(x_2)$, $f(x_3) \geq f(x_2)$ oppure
$f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x_3) \leq f(x_2)$ .

**3.9** – Vedi VII.2.17.

**3.11** – Vedi VII.3.2.

∘ **3.13** – Vedi V.1.9.

## Capitolo VIII

# DERIVABILITÀ

## § 1 – Derivate delle funzioni elementari

**1.4** – 2) $\cos^2(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

**1.10** – Sia $F(x) = f(g(x))$, se in $x_\circ g$ ammette derivate destra e sinistra e se in $g(x_\circ)$ $f$ ammette derivate destra e sinistra, allora $F$ ammette in $x_\circ$ derivate destra e sinistra e

$$F'_+(x_\circ) = f'_+(g(x_\circ))g'_+(x_\circ), \quad F'_-(x_\circ) = f'_-(g(x_\circ))g'_-(x_\circ).$$

**1.16** – Tenere presente che $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

**1.23** – $$\frac{(P'(x))^2 - P(x)P''(x)}{P^2(x)} = D\left(-\frac{P'(x)}{P(x)}\right).$$

**1.26** – $$\frac{d^{4h}}{dt^{4h}} \sin t = \sin t.$$

**1.27** – $$\frac{d^n}{dt^n}\,\frac{1}{t} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{t^{n+1}}.$$

**1.28** – $$D^n(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x).$$

**1.30** – 2) Per induzione.

**1.32** – Per induzione.

## § 2 – Teorema de l'Hospital e formula di Taylor

**2.3** – Usare la regola de l'Hospital.

**2.7** – Scegliere $a$ e $b$ in modo da annullare per $x = 0$ le derivate successive di $g(x)$.

∘ **2.13** – Posto

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

è $F(x) - F(x_0) = R_n(x)$ (resto della formula di Taylor). Applicare quindi il teorema di Cauchy sull'incremento di due funzioni alle funzioni $F$ e $G$.

**2.14** – Per 2), mostrare che $\left|\binom{\frac{1}{7}}{n}\right| \leq \frac{1}{7n}$.

**2.15** – Si veda VIII.2.14.

## § 3 – Proprietà delle funzioni derivabili

**3.1** – Se $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + k$ ha punti estrementi, l'ordinata del minimo deve essere positiva oppure l'ordinata del massimo deve essere negativa (vedi diagramma A 11).

∘ **3.2** – $P'(n.x) = P(n-1, x)$, procedere per induzione osservando che $P(n,x) = P'(n,x) + \frac{x^n}{n!}$.

**3.4** – Usare il teorema dell'incremento finito.



**3.5** – Sia $f'(a) = A < B = f'(b)$, se $A < C < B$ considerare la funzione $g(x) = f(x) - Cx$.

**3.6** – Vedi VIII.3.5.

**3.7** – Seguire la dimostrazione del teorema di Rolle.

**3.8** – Usare il teorema dell'incremento finito.

**3.9** – Usare il teorema dell'incremento finito.

**3.10** – Usare il teorema dell'incremento finito.

∘ **3.12** – Se $f$ non è costante, mostrare che esiste un intervallo $(\alpha, \beta)$ con $a \leq \alpha < \beta \leq b, f(\alpha) = f(\beta) = 0$ ove è definito $\ln|f(x)|$ e usare VIII.3.5.

∘ **3.13** – Mostrare che la funzione

$$G(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{per} \quad x = a \\ \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{per} \quad a < x \leq b \end{cases}$$

ha un estremante all'interno di $(a, b)$.

**3.14** – Supporre, per assurdo, che esista un minimo, interno all'intervallo $[a, b]$, con ordinata negativa.

**3.15** – Derivare $xf'(x) - f(x)$.

**3.16** – Per la formula di Taylor è

$$f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x+2h) - f(x)) - hf''(\xi).$$

**3.21** – 1) Usando la formula del Taylor mostrare che $f(x)$ è nulla nell'intervallo $|x| < \frac{1}{2k}$.
2) Per induzione e usare VIII.3.4.

**3.22** – Studiare il segno di $f''(x)$ usando la I.5.13 con $p = q = 2$.

**3.25** – Usare il teorema dell'incremento finito.

○ **3.26** – Mostrare che fissati arbitrariamente $\varepsilon > 0$ , $\delta > 0$ è
$$|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon + \delta |x|.$$

**3.27** – Vedi VIII.3.25.

○ **3.28** – Fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, considerare la funzione ausiliaria
$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + \varepsilon(x - a)(x - b),$$
è $\phi(a) = \phi(b) = 0$.
Mostrare che $\phi(x) \leq 0$ su $[a, b]$, osservando che se avesse un massimo in $x_0 \in (a, b)$, in tal punto $\phi(x)$ dovrebbe avere derivata seconda simmetrica negativa, il che porterebbe ad un assurdo.
Fare poi analoghe considerazioni sulla funzione
$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)(x - b).$$

**3.30** – Vedi VIII.3.27 e VIII.3.29.

## Capitolo IX
# STUDIO DI FUNZIONI

### § 1 – Esercizi introduttivi sullo studio dell'andamento delle funzioni reali di variabile reale

**1.8** – Scrivere la formula di MacLaurin di $f(x)$ arrestata al quinto termine.

**1.10** – Porre $y = s - x$.

○ **1.13** – La funzione $F(x, \theta) = a \sec \theta + x \cos \theta - b$ è crescente rispetto ad $x$ per ogni $\theta$ fissato.

**1.15** – Posto $f(x) = 12x^6 - 14x^3 - 3x^2 - 5$, studiare il segno di $f'(x)$.

**1.16** – Usare VIII.3.2.

○ **1.18** – 1) Studiare il segno $F(x) = x \ln a - b \ln x$.
2) Considerata l'equazione $a^x = \log_a x$, osservare che tali funzioni sono una l'inversa dell'altra.

○ **1.19** – Per VII.2.10 $f$ è continua su $(a, b)$.

○ **1.20** – Per l'esistenza di un unico $\xi \in (a_1, b_1)$ con $f(\xi) = 0$, si veda IX.1.19.

**1.22** – Si vedano IX.1.20 e IX.1.21.

**1.23** – Studiare $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

**1.27** – Porre $\frac{1}{x^2} = t$.

**1.28** – Confrontare i diagrammi delle funzioni $e^x, 2x+1$ per il campo di esistenza e di $\frac{x}{2}, \ln|x+1|$ per il segno del numeratore.

**1.29** – Confrontare i diagrammi delle funzioni $e^x, |(e-1)x+1|$ per il campo di esistenza e di $e^x, e\sqrt{|x|}$ per il segno del numeratore.

**1.31** – 1) $\mathrm{Ch}\, u = 1 + \frac{u^2}{2!} + o(u^3)$

2) $e^{-u} = 1 - \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

## 2 – Studio dell'andamento di funzioni reali di variabile reale

**2.7** – Per lo studio del segno di $f''(x)$ potrà essere utile confrontare i diagrammi delle funzioni $x^2(5x-21)$ e $14-15x$.

**2.8** – Per lo studio del segno di $f''(x)$ potrà essere utile porre $x^2 = u$ e confrontare i diagrammi di $u^2(12-3u), 18u-18$ per $u > 0$.

**2.17** – Per lo studio del segno di $f(x), f'(x), f''(x)$ potrà essere utile porre $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = t$.

**2.18** – Dedurre il segno di $f(x)$ dallo studio di $f'(x)$.

**2.21** – Per lo studio del segno di $f(x)$ potrà essere utile porre $t = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

**2.22** – Per lo studio del segno di $f''(x)$ vedi IX.1.20.

**2.26** – Per lo studio del segno di $f''(x)$ per $x < 0$ potrà essere utile confrontare i diagrammi delle funzioni $\sqrt{2}\,|\ln|x|+1|$ e $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$, cioè studiare la funzione $\sqrt{2}\,|\ln|x|+1| - \frac{1}{\sqrt{|x|}}$.

Capitolo X

# SUCCESSIONI DI FUNZIONI, SERIE DI FUNZIONI, SERIE DI POTENZE

## § 1 – Successioni e serie di funzioni

**1.1** – Valutare il massimo di $f_n(x)$.

**1.2** – 2) Ricordare che il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua.

**1.6** – 2) Mostrare che non è verificata la condizione di Cauchy per la convergenza unforme.

**1.17** – Usare X.1.15.

**1.21** – Osservare che la serie può essere differenziata termine a termine.

**1.22** – Vedi I.1.10.

**1.23** – Vedi IV.3.2 e X.1.22.

∘ **1.24** – Usare il teorema del doppio limite. Vedi diagramma A 12.

∘ **1.26** – Mostrare che per ogni punto $x \in [a,b]$, esiste un aperto $U(x)$ tale che $x \in U(x)$ e che su $U(x) \cap [a,b]$ la convergenza è uniforme.

∘ **1.27** – Considerare la successione $\{g_n\}$, ove $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ e mostrare che ogni $x \in T$ ha un intorno in cui la convergenza è uniforme, quindi procedere come in X.1.26.

○○ **1.28** – Se $d = \operatorname{diam} T = \sup_{z,w\in T} |z-w|$ e $P(z) = a_k z^k + \ldots + a_o$, allora

$$\sup_{z\in T} |P(z)| = |a_k| \sup_{z\in T} \left\{ \prod_{i=1}^{k} (z - z_i) \right\} \geq |a_k| \cdot \left(\frac{d}{4k}\right)^k,$$

ove $z_1, z_2, \ldots z_k$ sono le radici, eventualmente coincidenti, di $P(z)$.

Dedurre che se una successione di polinomi di grado non superiore a $k$ converge uniformemente a 0, allora le successioni dei coefficienti dei termini dello stesso grado convergono a 0.

**1.29** – Vedi X.1.15.

**1.30** – Vedi X.1.29.

## § 2 – Serie di potenze

**2.2** – Per gli intervalli di convergenza vedi X.2.1.

**2.4** – Per 3) e 4) vedi IV.3.2.

**2.7** – Usare IV.3.7.

**2.8** – Vedi IV.3.1 e IV.3.2.

**2.9** – Per 1) procedere per induzione.

○○ **2.10** – Tenere presente che $D(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $D(\text{sett Sh}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ed usare X.2.2.

Capitolo XI

# INTEGRAZIONE DI FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

## § 1 – Metodi di integrazione

**1.1** – Tutti gli integrali proposti si calcolano direttamente utilizzando le tavole di derivazione e le regole elementari di integrazione.

**1.3** – Tutti gli integrali proposti si calcolano medinate semplici sostituzioni.

**1.4** – 1) Porre $f(x) = t$.

**1.8** – $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q} = 4\dfrac{ax+b}{(2x+p)^2+4q-p^2}$; porre $2x+p=t$.

**1.9** – Tutti gli integrali proposti si calcolano mediante integrazione per parti.

**1.14** – Vedi XI.1.8 e XI.1.13.

**1.15** – Vedi XI.1.14 e XI.1.13.

**1.16** – Effettuare la decomposizione e usare XI.1.12, XI.1.13, XI.1.14, XI.1.15.

**1.17** – Effettuare la divisione per ricondursi al caso in cui il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore.

**1.18** – Vedi XI.1.8 e XI.1.14.

**1.19** – Ricondursi a integrali di funzioni razionali fratte medinate opportune sostituzioni.

**1.21** – Vedi XI.1.20.

**1.23** – 1) , 2) , 3) per parti; 9) vedi XI.1.22.

**1.24** – 2) vedi XI.1.22; 5) vedi XI.1.20; 10) vedi XI.1.8.

**1.25** – 1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $2 + \cos x = 2(\cos^2 t + \sin^2 t) + (\cos^2 t - \sin^2 t)$ dove $x = 2t$;

3) $\cos x + 2\sin x + 3 = \sqrt{5}\cos(x - \alpha) + 3$, dove

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, e procedere come in 2).

**1.27** – 3) Porre $x = a \operatorname{Sh} t$ e usare XI.1.26, 5).

**1.28** – 1) Vedi I.2.5; 2) vedi I.2.15; 3) vedi I.2.16.

**1.29** – 1) Vedi XI.1.18, 2) vedi XI.1.26, 1).

**1.30** – 1) Porre $t = \sqrt[3]{x+4}$; 2) porre $t = \sin^2 x$; 3) porre $u = \sqrt{1+t}$.

**1.31** – 1) Vedi XI.1.26, 4); 2) vedi XI.1.27, 1).

**1.32** – 3) Vedi XI.1.9, 2); 4) vedi XI.1.18, 2).

**1.33** – 1) Spezzare l'integrale in $\int_0^a \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_a^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

2) e 3) operare analogamente a1).

**1.34** – Si ricordi che analogamente al caso delle serie numeriche, vale il seguente criterio del confronto: se $|f(x)| \le g(x)$ ed esiste su un certo intervallo (limitato oppure no) l'integrale generalizzato di $g$ allora esiste anche quello di $f$.
Se $0 \le g(x) \le f(x)$, se $g$ non è integrabile, neppure $f$ lo è.



**1.35** – 1) Applicare il metodo di integrazione per parti a $\int_a^k \frac{\sin x}{x} dx$;

2) procedere come in 1).

## § 2 – Proprietà delle funzioni integrabili

**2.5** – Osservare che $\quad x_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{p}{n})^2}$.

**2.8** – Applicare la regola di derivazione delle funzioni composte.

○ **2.9** – Determinare dapprima due funzioni a gradino $\tilde{h}(x)$ e $\tilde{k}(x)$ che verificano le diseguaglianze richieste, quindi approssimare $\tilde{h}$ e $\tilde{k}$ con opportune funzioni continue lineari a tratti.

○ **2.10** – Dividere $[a, b]$ in $n$ parti uguali e applicare I.5.13.

○ **2.11** – $\{f(x)+g(x)\}^p = f(x)\{f(x)+g(x)\}^{p-1} + g(x)\{f(x)+g(x)\}^{p-1}$, applicare XI.2.10 ai due addendi, con $q = \frac{p}{p-1}$.

**2.12** – Utilizzare XI.2.9 osservando che le funzioni $h$ e $k$ ivi ivi costruite sono tali che

$$\sup_{x\in[a,b]} |k(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \text{ e } \sup_{x\in[a,b]} |h(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

**2.13** – Se $T = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un intervallo $[x_1, x_2]$ dove $f(x) > T - \varepsilon$, allora per ogni $x$ è

$$(T - \varepsilon)\mathcal{X}_{[x_1,x_2]}(x) \le f(x) \le T \cdot \mathcal{X}_{[a,b]}(x).$$

**2.14** – Vedi VIII.3.18.

**2.15** – $$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f'(t)\cdot \left(\int_a^t g(u)du\right)dt,$$
supporre $f$ crescente e porre $v = f(t)$.

Capitolo XII

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI ELEMENTARI

## § 1 – Equazioni differenziali del I ordine

**1.1** – Detta $\varphi(x)$ una soluzione, sostituirla nell'equazione e moltiplicare entrambi i membri per $e^{A(x)}$.

**1.2** – Si veda XII.1.1. Per l'esistenza conviene scegliere opportunamente le primitive che compaiono nella formula risolutiva.

**1.4** – Per la seconda parte si osservi che se $y$ è periodica di periodo $2\pi$, lo è anche $y'$.

∘ **1.5** – Operare la sostituzione $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$ per $\alpha \neq 1$.

∘ **1.6** – Si veda XII.1.5.

**1.7** – Vedi XII.1.5.

∘ **1.20** – Distinguere i due casi $ab_1 - a_1b \neq 0$ e $ab_1 - a_1b = 0$.

**1.23** – Porre $y' = t$ e determinare la soluzione in forma parametrica (con $t$ come parametro).

**1.26** – Esplicitare rispetto ad $y'$.

## § 2 – Equazioni differenziali di ordine superiore.

**2.2** – Supporre $y(x)$ periodica di periodo $2\pi$ e trovare una condizione su $\beta$.

**2.3** – Cercare un integrale particolare della forma $a \sin x + b \cos x$.

**2.6** – Si veda XII.2.5.

**2.7** – Si veda XII.2.5.

**2.9** – Dopo aver determinato tre integrali indipendenti dell'equazione omogenea associata, si applichi il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie. (XII.2.8)

○ **2.12** – Derivare $(E_1)$ e confrontare con $(E)$.
Una volta determinata $f$, la $(E_1)$ si riconduce a una equazione di Lagrange (vedi XII.1.22).

**2.14** – Scrivere opportunamente la famiglia di circonferenze e tener presente l'esercizio XII.2.13.

# PARTE III

Capitolo I

# PRELIMINARI

## § 1 – Insiemi. Operazioni sugli Insiemi. Applicazioni

**1.1** – $A \cup B = \{2, \{2\}, \{3\}, L, K, T, IV, III, *, **, 20, 21, \tilde{L}, \sim, 3\}$

$A \cap B = \{2, *, IV\}$

$A - B = \{3, \{3\}, L, 21, \sim\}$

$B - A = \{\{2\}, K, T, **, III, 20, \tilde{L}\}$

$\mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset, \{2\}, \{*\}, \{IV\}, \{2, *\}, \{2, IV\}, \{*, IV\}, \{2, *, IV\}\}.$

**1.2** – a) 2), 3);
b) Nessuno;
c) 1), 2), 4);
d) 2), 3);
e) 1), 2), 4).

**1.3** – Se $A \subset B, C \subset A$, e $B \neq C$ è $A \cup B = A \cup C = A$.

**1.4** – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
e
$A \cap C = (A \cap C \cap B^C) \cup (A \cap C \cap B) \subset (A \cap C \cap B^C) \cup (A \cap B)$
da cui
$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^C) \cup (A \cap B) =$
$= (A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^C).$
Poichè è ovviamente $A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c)$ si ha l'asserto.

**1.5 –** 1) L'uguaglianza è vera poichè l'unione è commutativa.

2) $(A - B) \cup (B - A) = \emptyset \Rightarrow A - B = \emptyset$ e $B - A = \emptyset \Rightarrow A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$, il viceversa è ovvio.

3) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) =$
$= [(A \cap B^C) \cup B] \cap [(A \cap B^C) \cup A^C] =$
$= (A \cup B) \cap (A^C \cup B^C) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

4) $[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \cap (A^C \cup B^C \cup C^C) =$
$= [(A \cup B) \cap C)] \cap [(A^C \cup B^C) \cup C^C] =$
$= [(A \cup B) \cap C] \cap (A^C \cup B^C) =$
$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^C \cap C = (A \div B) \cap C$.

○ **1.6 –** $A \div (B \div C) = [A - (B \div C)] \cup [(B \div C) - A] =$
$= \{A - [(B \cup C) - (B \cap C)]\} \cup \{[(B - C) \cup (C - B)] - A\} =$
$= [A - (B \cup C)] \cup (A \cap B \cap C) \cup [B - (C \cup A)] \cup [C - (B \cup A)]$,
poichè quest'ultima espressione è simmetrica rispetto ad $A, B, C$ segue l'asserto.

**1.7 –** $(A \cap B) \div C = [(A \cap B) \cup C] \cap (A^C \cup B^C \cup C^C) =$
$= (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A^C \cup B^C \cup C^C)$,
$(A \div C) \cap (B \div C) = (A \cup C) \cap (A^C \cup C^C) \cap (B \cup C) \cap (B^C \cup C^C)$.
Poichè $A^C \cap C^C \subseteq A^C \cup B^C \cup C^C$ e $B^C \cup C^C \subseteq A^C \cup B^U \cup C^C$ segue l'asserto.

○ **1.8 –** a) $(A \cap B) \div C = (A \cap B \cap C^C) \cup [C \cap (A \cap B)^C] =$
$= (A \cap B \cap C^C) \cup (C \cap A^C \cap C^C) \cup [C \cap (A \div B)]$
poichè
$(A \cap B)^C = (A \cup B)^C \cup (A \div B)$;

b) $(A \div C) \cap (B \div C) =$
$= [(A \cup C) - (A \cap C)] \cap [(B \cup C) - (B \cap C)] =$
$= (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A^C \cup C^C) \cap (B^C \cup C^C)$;

c) $C \cap B \cap C^C = A \cap B \cap C^C \cap C^C \subseteq$
$\subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A^C \cup C^C) \cap (B^C \cap C^C)$



e analogamente per
$C \cap A^C \cap B^C$;

d) $C \cap (A \div B) \subset C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$
e poichè
$(C \cap A) \cap (A \div C) = \emptyset$ e $(C \div B) \cap (B \div C) = \emptyset$
si ha l'asserto.

Per I.1.7 si ha
$(A \cap B) \div C = [(A \div C) \cap (B \div C)] \cup [C \cap (A \div B)]$,
la condizione richiesta è quindi $C \cap (A \div B) = \emptyset$, cioè

$$C \subset (A \cap B) \cup (A^C \cap B^C).$$

**1.9 –** $E - F = (E \div F) \cap E \in \mathcal{A}$,
$E \cup F = (E - F) \div F \in \mathcal{A}$.

**1.10 –** Se $x > 1$, per $n > \left[\frac{1}{x-1}\right]$ è $x \notin A_N$, quindi $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ è il segmento di estremi 0 e 1 inclusi.
$A_1 \supset A_n$ per ogni $n > 1$, quindi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1$.

**1.11 –** I due insiemi richiesti sono rispettivamente il cerchio $C'$ concentrico con $C$, di raggio $\frac{1}{2}$ ed il cerchio $C$ di raggio 1.

**1.12 –** $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=r}^{\infty} A_k$ per $r, n \in \mathbf{N}$ qualsiasi,
quindi
$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=r}^{\infty} A_k$ da cui l'asserto per l'arbitrarietà di $r$.

○ **1.13 –** Se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ allora $x \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_k$ per qualche $n$, cioè $x$ appartiene a tutti gli $A_n$, salvo un numero finito, quindi $x \in A_*$, il viceversa è ovvio.

Se $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ allora $x \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_k$ per ogni $n$, cioè $x$ appartiene a infiniti $A_n$, quindi $x \in A^*$, il viceversa è ovvio.

**1.14** – Le affermazioni sono immediata conseguenza delle definizioni di $A_*$ e $A^*$.

**1.15** – Sia $x \in S$, per la simmetria con cui compaiono $A, B, C, D$, possiamo supporre $x \in A \cap B \cap C$, allora $x$ appartiene a ciascuno degli insiemi la cui intersezione è $T$, quindi $S \subseteq T$.
Sia $x \in T$, se $x \in A \cap B \cap C \cap D$ ovviamente $x \in S$, supponiamo che $x \notin A$, allora $x$ deve appartenere a $B, C, D$, cioè $x \in S$, quindi $T \subseteq S$ e segue l'asserto.

∘ **1.16** – Sia $x \in S$, possiamo supporre che $x \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i$, quindi $x \in A_i$ $i = 1, \ldots, k$; poichè ciascuna unione in $T$ è formata da $n - k + 1$ insiemi, in ognuna di queste vi è almeno uno degli $A_i$ con $i = 1, \ldots, k$ quindi $x \in T$ e $S \subseteq T$.
Sia $x \in T$, se $x$ appartiene ad almeno $k$ insiemi, allora $x \in S$; supponiamo che $x \in T$ ed appartenga a meno di $k$ insiemi $A_i$, vi sono almeno $n - k + 1$ insiemi non contenenti $x$, ma allora $x \notin T$, assurdo.

**1.17** – $A \times B = \{(\emptyset, \beta), (\emptyset, \emptyset), (2, \beta), (2, \emptyset), (**, \beta), (**, \emptyset)\}$;
$B \times A = \{(\beta, \emptyset), (\emptyset, \emptyset), (\beta, 2), (\emptyset, 2), (\beta, **), (\emptyset, **)\}$;
$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(\emptyset, \emptyset)\}$.

**1.18** – 1) $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$, supponiamo per esempio che $x \in A, y \in C$, allora $(x, y) \in A \times C$ e quindi al secondo membro; in modo analogo si ragiona in ogni altro caso. Per il viceversa si procede analogamente.
2) Si procede come in 1).

**1.19** – $\emptyset, \{(a,s)\}, \{(b,s)\}, \{(c,s)\}, \{(a,s),(b,s)\}, \{(a,s),(c,s)\}, \{(b,s),(c,s)\}, \{(a,s),(b,s),(c,s)\}$.



**1.20** – a) $\{(a,a),b,b)\}, \{(a,a),(a,b),(b,b)\}, \{(a,a),(b,a),(b,b)\}, X \times X$;
b) $\{(a,a)\}, \{(b,b)\}, \{(a,a),(b,b)\}, \{(a,b),(b,a)\}, \{(a,a),(a,b),(b,a)\}, \{(a,b),(b,a),(b,b)\}, X \times X, \emptyset$;
c) $\{(a,a)\}, \{(b,b)\}, \{(a,a),(b,b)\}, \{(a,a),(a,b)\}, \{(a,a),(b,a)\}, \{(a,b),(b,b)\}, \{(b,a),(b,b)\}, \{(a,b)\}, \{(b,a)\}, \{(a,a),(b,b),(a,b)\}, \{(a,a),(b,b),(b,a)\}, \emptyset$;
d) $\{(a,a)\}, \{(b,b)\}, \{(a,b)\}, \{(b,a)\}, \{(a,a),(b,b)\}, \{(a,a),(a,b)\}, \{(a,a),(b,a)\}, \{(a,b),(b,b)\}, \{(b,a)\}, \{(b,b)\}, \{(a,a),(b,b),(a,b)\}, \{(a,a),(b,b),(b,a)\}, X \times X, \emptyset$;
e) $\{(a,a)\}, \{(b,b)\}, X \times X$;
f) $\{(a,a),(b,b)\}, \{(a,a),(b,b),(a,b)\}, \{(a,a),(b,b),(b,a)\}$.

**1.21** – 1) : a) , b), d), e).
2) : c) , d).
3) : c).

**1.22** – 1) Poichè $f(A_i) \subseteq f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, allora $\bigcup_{i\in I} f(A_i) \subset f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$; viceversa se $x \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ allora $x \in f(A_i)$ per qualche $i$, da cui l'asserto.
2) Poichè $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_i$ per ogni $i$, segue l'asserto.

**1.23** – Se $f$ non è iniettiva, esistono $x_1$ e $x_2$ con $f(x_1) = y = f(x_2)$ e $x_1 \neq x_2$.
Sia $A = \{x_1\}, B = \{x_2\}, f(A \cap B) = \emptyset, f(A) \cap f(B) = y$, assurdo.

**1.24** – 1) Analoga a I.1.22.
2) $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \supset f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$ si dimostra come in I.1.22;
$x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ allora esiste $y \in \bigcap_{i\in I} B_i$ tale che $x \in f^{-1}(y)$,

da cui l'asserto.

3) Ovvia.

**1.25 –** Poichè $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ segue l'asserto.

**1.26 –** Ovvio.

**1.27 –** 1) Se $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$ allora $h(x_1) = h(x_2)$, assurdo.

2) Sia $y_1 \neq y_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$ allora esistono $x_1, x_2$ con $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, allora $h(x_1) = h(x_2)$, assurdo.

**1.28 –** 1) Ovvia.

2) Segue da 1).

**1.29 –** 1) Ovvio.

2) $$\varphi(A\cup B)= \bigcap_{x\in A\cup B}\{f(x)\} = \left(\bigcap_{x\in A}\{f(x)\}\right)\cap\left(\bigcap_{x\in B}\{f(x)\}\right) = \varphi(A)\cap\varphi(B)$$

3)Poichè $A\cap B \subset A, A\cap B\subset B$, da 1) segue l'asserto.

**1.30 –** Per ogni $x \in X$ è $f(x) = \{(p_i \ o \ f)(x)\}_{i\in I}$ da cui l'asserto.

## § 2 – Simbolo di sommatoria, simbolo di prodotto Dimostrazione per induzione

**2.1 –** $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6$;

$a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + a_6$;

$a_0 - a_1x^2 + a_2x^4 + \ldots + (-1)^n a_n x^{2n}$;

$a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3$.



**2.2 –** $$\sum_{k=2}^{5}\frac{k^k-(k-1)^{k-1}}{k^{k-1}}; \qquad \sum_{k=2}^{5}\left(1-\frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}\right);$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(4k+3); \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k x^{n-k}.$$

**2.3 –** 1) $$\sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=n+1}^{m}a_k - \sum_{i=1}^{n}a_i = \sum_{k=n+1}^{m}a_k;$$

2) $$\sum_{k=1}^{n}(k+1)+\sum_{h=1}^{n}(1-h) = \sum_{h=1}^{n}(h+1)+\sum_{h=1}^{n}(1-h) = \sum_{h=1}^{n}2 = 2n;$$

3) $$\left(\sum_i a_i\right)^2 - \left(\sum_i b_i\right)^2 = \sum_{i,j}a_ia_j - \sum_{i,j}b_ib_j = \sum_{i,j}(a_ia_j - b_ib_j);$$

4) $$\sum_{i,j,k}a_ib_jc_k = \sum_{i,j}a_ib_j\sum_k c_k = \sum_i a_i\sum_j b_j\sum_k c_k.$$

**2.4 –** $$\sum_{0\leq i+j\leq 3}a_ib_j = a_0b_0 + a_1b_0 + a_0b_1 + a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 + a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3.$$

**2.5 –** $s_n = 1 + q + \ldots + q^n$, $qs_n = q + q^2 + \ldots + q^{n+1}$ da cui
$$qs_n - s_n = q^{n+1} - 1 \quad \text{e} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n}q_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

**2.6 –** $n$ pari: $$1+2+\ldots(n-1)+n = (1+n)+\{2+(n-1)\}+ +\ldots+\left\{\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\} = \frac{n}{2}(n+1),$$
$n$ dispari: $$1+2+\ldots+(n-1)+n = (1+n)+ +\{2+(n-1)\}+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}+\frac{n+3}{2}\right)+\frac{n+1}{2} = = (n+1)\frac{(n-1)}{2}+\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**2.7 –** $$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=\sum_{k=0}^{2n+1}k-2\sum_{k=0}^{n}k=$$
$$=(2n+1)(n+1)-n(n+1)=$$
$$=(n+1)^2.$$

**◦ 2.8 –** $$\sum_{k=m}^{n-1}(u_k-u_{k+1})V_k+u_nV_n-u_mV_{m-1}=\sum_{k=m}^{n-1}u_kV_k+u_nV_n+$$
$$-\sum_{k=m}^{n-1}u_{k+1}V_k-u_mV_{m-1}=\sum_{k=m}^{n}u_kV_k+$$
$$-\sum_{k=m-1}^{n-1}u_{k+1}V_k=\sum_{k=m}^{n}u_kv_k.$$

**2.9 –** $$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_{ik}=\sum_{0\le i\le k\le n}a_{ik}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}a_{ik}\quad .$$

**2.10 –** 1) Tutti i fattori del secondo membro sono nel primo membro e viceversa.

2) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}b_j\right)a_i=\left(\prod_{j=1}^{n}b_j\right)^n\cdot\prod_{i=1}^{n}a_i=\prod_{i=1}^{n}a_ib_i^n.$

3) $\displaystyle\prod_{i,j=1}^{n}a_ib_j=\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}a_ib_j\right)=\prod_{i=1}^{n}a_i^n\left(\prod_{j=1}^{n}b_j\right)=\prod_{i=1}^{n}a_i^nb_i^n.$

**2.11 –** 1) $\displaystyle\prod_{s,r=1}^{n}(a_r-a_s)=0$ poiché contiene fattori del tipo $a_r-a_r$.

2) $$\prod_{\substack{s,r=1\\ s\ne r}}^{n}(a_r-a_s)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2\dots$$
$$\dots(a_1-a_n)^2(a_2-a_3)^2\dots(a_2-a_n)^2\dots$$
$$(a_{n-1}-a_n)^2.$$

3) $$\prod_{1\le r<s\le n}(a_r-a_s)=(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots$$
$$\dots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)\dots(a_{n-1}-a_n).$$



**2.12 –** $$\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)=\frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}k}\cdot\frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}k}=$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}.$$

**2.13 –** I.2.5: per $n=0$ è vera, $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}=\dfrac{1-q^{n+2}}{1-q}$.

I.2.6: per $n=1$ è vera, $\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

I.2.7.: per $n=1$ è vera, $(n+1)^2+(2n+3)=(n+2)^2$.

**2.14 –** $$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$

**2.15 –** 1) È vera per $n=1$,
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

2) È vera per $n=1$,
$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

**◦ 2.16 –** È vera per $n=1$,
$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos(n+1)x=$$
$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+2\sin\frac{x}{2}\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}=$$
$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n+1+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

∘ **2.17** – È vera per $n = 1$,

$$\frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \cdot \cos\frac{x}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{\sin x}{2^n \cdot 2\sin\frac{x}{2^{n+1}} \cdot \cos\frac{x}{2^{n+1}}} \cdot \cos\frac{x}{2^{n+1}} = \frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}}.$$

**2.18** – È vera per $n = 0$,

$$\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\left(1+x^{2^{n+1}}\right) = \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x} \quad .$$

## 3 – Elementi di analisi combinatoria

**3.1** – $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

**3.2** – $\binom{n}{3}$.

∘ **3.3** – Siano $A, B, C, D$, i 4 punti.
Scelti 3 punti fra essi, sia $\prod$ il piano che li contiene, esiste un solo piano equidistante da $\prod$ e dal punto rimanente, poichè $\binom{4}{3} = 4$ si sono individuati 4 piani equidistanti da $A, B, C, D$.
Scelti 2 punti, ad esempio $A, B$, si considera il piano $\prod$ per $A$ e $B$ e parallelo alla retta $r$ individuata da $C$ e $D$, esiste un solo piano equidistante da $\prod$ e da $r$, poichè $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$, in totale vi sono 7 piani equidistanti da $A, B, C, D$.



∘∘ **3.4** – Siano $A, B, C, D, E$ i 5 punti.
Scelti 4 fra di essi viene individuato o un piano o una sfera $\prod$ ed esiste un unico piano o un'unica sfera rispettivamente equidistante da $\prod$ e dal punto rimanente, sono così individuati $\binom{5}{4} = 5$ piani o sfere.
Scelti 3 punti, ad esempio $A, B, C$, si considera il piano $\prod$ che li contiene e la retta $r$ congiungente $D$ ed $E$. Se $r$ è parallela a $\prod$ vi è un piano equidistante da $\prod$ e $r$, se $r$ è incidente a $\prod$ vi è una sfera equidistante da A, B, C, D, E sono così individuati $\binom{5}{3} = 10$ piani e sfere. In totale N = 15.

**3.5** – 1) $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 10\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$ da cui

$n - 3 = \frac{2}{5}$, nessuna soluzione intera maggiore o uguale a 4.

2) $\frac{n(n-1)}{2!} = 3\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ da cui $n = 3$.

**3.6** – $\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)\dots(p-r+1)}{r!}$, $\binom{p}{r}$ è intero e $r!$ è primo con

$p$, quindi $\binom{p}{r} = ph$.

$\binom{4}{2} = 6$ non è divisibile per 4.

**3.7** – $D_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1)$, $\quad D_{n,h} = n(n-1)\dots(n-h+1)$,

$D_{n-h,k-h} = n(n-h)(n-h-1)\dots(n-k+1)$,

da cui l'asserto.
L'uguaglianza si dimostra facilmente anche con ragionamento combinatorio.

**3.8** – È vero per $n = 1$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

**3.9** – $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} =$

$$= \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} =$$

$$= \ldots = \sum_{r=k-1}^{n-1} \binom{r}{k-1}.$$

∘ **3.10** – $(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k = \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} x^h \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r =$

$$= (1+x)^m \cdot (1+x)^n,$$

uguagliando i coefficienti di $x^k$ si ottiene l'asserto.

**3.11** – $D_{m+n,k} = k!\binom{m+n}{k} = k! \sum_{r=0}^{k} \binom{m}{k-r}\binom{n}{r} =$

$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (k-r)! \binom{m}{k-r} r! \binom{n}{r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} D_{m,k-r} \ D_{n,r}.$$

**3.12** – Ponendo in I.3.10 $m = k\ n$ si ha

$$\binom{2\,n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r}\binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2.$$

**3.13** – $h^n = (1+1+\ldots+1)^n = \sum_{(*)} \frac{n!}{q_1!q_2!\ldots q_h!}.$

∘∘ **3.14** – Poichè $\frac{n!}{q_1!q_2!\ldots q_h!}$ è simmetrico rispetto a $q_1, a_2, \ldots, q_h$, si può supporre che il massimo si ottenga con $\overline{q}_1 \geq \overline{q}_2 \geq \ldots \geq \overline{q}_h$. Se $\overline{q}_1 \geq \overline{q}_h + 2$ a[illegible] $q_1!\overline{q}_h! > (\overline{q}_1 - 1)!(\overline{q}_h + 1)!$ cioè

$$\frac{n!}{\overline{q}_1!\overline{q}_2!\ldots\overline{q}_h!} < \frac{n!}{(\overline{q}_1 - 1)!\overline{q}_2!\ldots(\overline{q}_h + 1)!},$$

assurdo, quindi $0 \leq \overline{q}_1 - \overline{q}_h \leq 1$.
Allora $r\overline{q}_i$ sono eguali a $\overline{q}_1$ e $h - r$ sono eguali a $\overline{q}_h$ da cui $(h-r)\overline{q}_h + r(\overline{q}_h + 1) = n$ cioè $n = h\overline{q} + h + r$ e $\overline{q}_h = m$, da cui l'asserto.



**3.15** – I sottoinsiemi di $A$ costituiti da $r \leq N$ elementi sono $\binom{N}{r}$, quindi il numero dei sottoinsiemi di $A$ è $\sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r} = 2^N$ per I.3.13.

**3.16** – 1) $q_2 = 0$ deve essere $q_1 + q_3 + q_4 = 5$, 21 soluzioni; $q_2 = 1$ deve essere $q_1 + q_3 + q_4 = 2$, 6 soluzioni; in totale 27 soluzioni.

2) Le soluzioni sono infinite, poichè $q_1 = q_2$ e $q_3 = 1$ è soluzione qualunque sia $q_1$.

**3.17** – 1) $(x^2 + 3y - 2x)^5 = \sum_{(*)} \frac{5!}{q_1!q_2!q_3!} 3^{q_2} (-2)^{q_3} x^{2q_1+q_3} y^{q_2}$,

deve essere

$$\begin{cases} q_2 & = 1 \\ 2q_1 + q_3 & = 2 \\ q_1 + q_2 + q_3 & = 5 \end{cases}$$

Poichè il sistema non ha soluzioni in $\mathbb{N}$, il coefficiente di $x^2y$ è 0.

2) $\left(xy - \frac{1}{y} - 2x\right)^7 = \sum_{(*)} \frac{7!}{q_1!q_2!q_3!} (-1)^{q_2} (-2)^{q_3} x^{q_1+q_3} y^{q_1-q_2}$,

$$\begin{cases} q_1 & = q_2 \\ q_1 + q_3 & = 5 \\ q_1 + q_2 + q_3 & = 7 \end{cases}$$

da cui $q_1 = q_2 = 2$ e $q_3 = 3$. Il coefficiente è $-1680$.

3) $\left(\frac{x}{y} + 2 + xy + x^2\right)^5 = \sum_{(*)} \frac{5!}{q_1!q_2!q_3!q_4!} 2^{q_2} x^{q_1+q_3+2q_4} y^{q_3-q_1}$,

$$\begin{cases} q_3 & = q_1 \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 & = 5 \end{cases}$$

la parte richiesta è $(2+x^2)^5 + 20x^2(2+x^2)^3 + 30x^4(2+x^2)$.

∘∘ **3.18** – Per $n = 1$ è vera;

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n-2-k,n-1-k} = 2^{2n-2},$$

usando la relazione

$$C_{2n,n} = C_{2n,-1,n} + C_{2n-1,n-1}$$

si ottiene:

$$C_{2n,n} = C_{2n-1,n} + C_{2n-1,n-1}$$
$$2C_{2n-1,n-1} = 2C_{2n-2,n-1} + 2C_{2n-2,n-2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$2^{n-1}C_{n+1,1} = 2^{n-1}C_{n,1} + 2^{n-1}C_{n,0}$$
$$2^n C_{n,0} = 2^n C_{n-1,0}$$

Allora

$$S_n = C_{2n-1,n} + 2S_{n-1} + \frac{S_n}{2} - \frac{C_{2n,n}}{2}$$

da cui l'asserto.

## § 4 – Campo razionale e campo reale

**4.2** – $\frac{11}{8}$ decimale finito; $\frac{15}{33}$ periodico semplice;
$\frac{134}{15}$ periodico misto; $\frac{4808}{900}$ periodico misto;
$\frac{8054}{2475}$ periodico misto.

**4.3** – 1) $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n+1}$, le classi sono separate, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}$,
per ogni $\varepsilon > 0$ basta porre $n > \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ perchè $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} < \varepsilon$,
quindi le due classi sono indefinitamente ravvicinate; il numero separatore è 0.



2) $\frac{n-1}{n} < 1 < \frac{n+1}{n}$, sono separate; $\frac{n+1}{n} - \frac{n-1}{n} = \frac{2}{n}$,
sono indefinitamente ravvicinate; il numero separatore è 1.

3) $\frac{4n-2}{n} < 4 < \frac{4n+1}{n}$, $\frac{4n+1}{n} - \frac{4n-2}{n} = \frac{3}{n}$ sono

contigue e il numero separatore è 4.

4) $\log_{10} \frac{2n}{n+4} < \log_{10} 2 < \log_{10} \frac{2n+10}{n+4}$,
$\log_{10} \frac{2n+10}{n+4} - \log_{10} \frac{2n}{n+4} = \log_{10} \frac{2n+10}{2n} =$
$\log_{10}\left(1 + \frac{10}{2n}\right) < \varepsilon$ per

$$n > \frac{10}{2(10^\varepsilon - 1)},$$

$\log_{10} 2$ è il numero separatore.

**4.4** – Sia per assurdo $x = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, allora $m^2 = pn^2$ ma $p$ compare come potenze con esponente dispari nel secondo membro e pari nel primo, assurdo.

**4.5** – Sia $\log_{10} 3 = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$, allora $10^m = 3^n$, ma il primo membro non contiene il fattore 3, assurdo.

**4.6** – $a + b \in \mathbb{Q}$; $a + \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $\alpha + \beta$ non si può dire nulla;
$3\alpha \in \mathbb{Q}$; $b\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ per $b \neq 0$; $ab \in \mathbb{Q}$; $\alpha\beta$ non si può dire nulla.

**4.7** – $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx+d)}$, $cx + d \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ quindi
$\frac{ad-bc}{c(cx+d)} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ da cui l'asserto.

**4.8** – 1) Sia per assurdo $\sqrt{m} + \sqrt{n} = s$ con $s \in \mathbb{Q}$, allora è $n = s^2 - 2s\sqrt{m} + m$, ma il secondo membro è irrazionale, assurdo.

2) $\sqrt{m}+\sqrt[k]{n}=s \quad s\in\mathbb{Q}$, allora è

$$n=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}s^{k-r}(-1)^r\sqrt{m^r}=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2i}s^{k-2i}m^i-$$

$$-\sqrt{m}\cdot\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2i+1}s^{k-2i-1}m^i,$$

ed essendo il secondo membro irrazionale si perviene all'assurdo.

**4.9** – Non è periodico in quanto vi sono allineamenti di cifre equali, per altro qualsiasi, di lunghezza arbitraria.

**4.10** – $m^h < n^i < m^{h+1}$ da cui

$$h\log_{10} m < i\log_{10} n < (h+1)\log_{10} m \quad \text{e}$$

$$h\,\frac{\log_{10} m}{\log_{10} n} < i < (h+1)\frac{\log_{10} m}{\log_{10} n},$$

essendo

$$1<\frac{\log_{10} m}{\log_{10} n}<k.$$

Il numero degli interi che verificano la relazione è compreso tra 1 e $k$ estremi inclusi.

∘ **4.11** – Per assurdo supponiamo

$\frac{1}{n} < \text{mant}(ka) < 1-\frac{1}{n}$ per $k=1,2,\ldots,(n-1)$.

Allora gli $n-1$ numeri mant$(ka)$ stanno in $n-2$ intervalli di ampiezza $\frac{1}{n}$, vi sono quindi $k_1$ e $k_2$ con

$0\le \text{mant}(k_1a)-\text{mant}(k_2a)\le\frac{1}{n}$, allora

$0\le \text{mant}(k_1-k_2)a\le\frac{1}{n}$; $|k_1-k_2|a$ differisce da un intero per al più $\frac{1}{n}$.



**4.12** – Sia $\sin n_1=\sin n_2,\ n_2>n_1$, allora $n_2=(-1)^k n_1+k\pi$ per un $k\in\mathbb{N}$, assurdo: il primo membro è intero mentre il secondo membro è irrazionale.

**4.13** – 1) 0, 1; 1 è massimo. 2) $-\infty,+\infty$
3) 0, 1; 0 è minimo. 4) $0,+\infty$.
5) 0, 2. 6) $-1, 20$; $-1$ è minimo, 20 è massimo.
7) 0, 3. 8) 0,1; 0 è minimo.
9) $-6, 3$; $-6$ è minimo, 3 è massimo.

**4.14** – 1) $\alpha+u\le\alpha+\sup\mathcal{U}$, per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\overline{u}\in\mathcal{U}$ con $\sup\mathcal{U}-\varepsilon\overline{u}\le\sup\mathcal{U}$, quindi $\alpha+\sup\mathcal{U}-\varepsilon<\alpha+\overline{u}\le\alpha+\sup\mathcal{U}$ da cui l'asserto.

2) $u+v\ge\inf\mathcal{U}+\inf\mathcal{V}$, per ogni $\varepsilon>0$ esistono $\overline{u}\in\mathcal{U}$ e $\overline{v}\in\mathcal{V}$ con $\inf\mathcal{U}\le\overline{u}<\inf\mathcal{U}+\frac{\varepsilon}{2}, \inf\mathcal{V}\le\overline{v}<\inf\mathcal{V}+\frac{\varepsilon}{2}$ cioè $\inf\mathcal{U}+\inf\mathcal{V}\le\overline{u}+\overline{v}<\inf\mathcal{U}+\inf\mathcal{V}+\varepsilon$ da cui l'asserto.

3) Analogo a 2).

4) $u\cdot v\ge\inf\mathcal{U}\cdot\inf\mathcal{V}$, per ogni $\varepsilon>0$ esistono $\overline{u}\in\mathcal{U}$ e $\overline{v}\in\mathcal{V}$ con $\inf\mathcal{U}\le\overline{u}<\inf\mathcal{U}+\varepsilon, \inf\mathcal{V}\le\overline{v}<\inf\mathcal{V}+\varepsilon$ cioè $\inf\mathcal{U}\cdot\inf\mathcal{V}\le\overline{uv}<\inf\mathcal{U}\cdot\inf\mathcal{V}+\varepsilon(\inf\mathcal{U}+\inf\mathcal{V}+\varepsilon)$, da cui l'asserto.

∘ **4.15** – Sia $s\notin A$, fissato $\varepsilon<(1-s)s$ esistono $\overline{x}$ e $\overline{y}\in A$ tali che

$s-\varepsilon<\overline{x}<\overline{y}<s$, allora $\frac{\overline{x}}{\overline{y}}\in A$, ma

$\frac{\overline{x}}{\overline{y}}>\frac{s-\varepsilon}{s}>\frac{s-s(1-s)}{s}=s$, assurdo.

∘ **4.16** – Gli elementi di $A=\bigcup_{h=1}^{\infty}A_h$ sono tutti e soli gli elementi elencati nella tabella e possono essere ordinati nel seguente modo (vedi tratti sulla tabella):

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{33}, \ldots .$$

**4.17** – Poichè l'insieme dei polinomi, di grado $n$ fissato, a coefficienti interi è numerabile (I.4.16), pure numerabile è allora l'insieme degli zeri di tali polinomi, allora, ancora per I.4.16, segue l'asserto.

∘∘ **4.18** – $A_n \subset A_{n+1},\ n = 0, 1, 2 \ldots,\ \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A,\ \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}$.
Si definisce $f : A \longrightarrow \mathbb{Q}$ nel modo seguente: se $a_h \in A_i$ è $f(a_h) = f_i(a_h)$ ; $f$ per costruzione, gode delle proprietà richieste.

∘ **4.19** – Sia $\overline{x} \in A$ e non esista $u \in A$ con $u < \overline{x}$ $(\overline{x} = \min A)$.
Supponiamo che esista $f : A \longrightarrow \mathbb{Q}$ biiettiva che conserva l'ordine.
Se $f(\overline{x}) = r$, scelto $s \in \mathbb{Q}$ con $s < r$, non esiste alcun $u \in A$ con $f(u) = s$, in quanto dovrebbe $u < \overline{x}$; si è così pervenuti all'assurdo.
In modo analogo si ragiona nelle due rimanenti situazioni. Da quanto visto in precedenza non esiste $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ biiettiva che conserva l'ordine.

**4.20** – $\alpha = [\alpha] + \operatorname{mant}\alpha,\ \ \beta = [\beta] + \operatorname{mant}\beta$; quindi

$$\alpha + \beta = [\alpha] + [\beta] + \operatorname{mant}\alpha + \operatorname{mant}\beta$$

ed essendo ovviamente $0 \leq \operatorname{mant}\alpha + \operatorname{mant}\beta < 2$ si ha l'asserto.

**4.21** – $[\alpha\beta] = [([\alpha] + \operatorname{mant}\alpha)([\beta] + \operatorname{mant}\beta)] =$
$= [[\alpha][\beta] + [\alpha]\operatorname{mant}\beta + \beta\operatorname{mant}\alpha] =$
$= [\alpha][\beta] + [\,[\alpha]\operatorname{mant}\beta + \beta\operatorname{mant}\alpha]$;
$0 \leq [[\alpha]\operatorname{mant}\beta + \beta\operatorname{mant}\alpha] \leq [[\alpha] + [\beta]] = [\alpha] + [\beta]$.
Si osservi che nell'enunciato nessuna delle due disuguaglianze può essere sostituita con una disuguaglianza stretta.

**4.22** – $10^{\alpha} = 10^{[\alpha] + \operatorname{mant}\alpha}$, quindi per I.4.20 è

$$[10^{\alpha}] \geq [10^{[\alpha]}[10^{\operatorname{mant}\alpha}] \geq 10^{[\alpha]}.$$

L'altra disuguaglianza è ovvia.

**4.23** – $$1 < \frac{4}{\pi} \leq k \sin\frac{2}{k} < k \cdot \frac{2}{k} = 2.$$



∘ **4.24** – $n\alpha = na + h + \rho,\ [n\alpha] = na + h;\ \ \alpha + \dfrac{k}{n} = a + \dfrac{h+k}{n} + \dfrac{\rho}{n}$
e quindi

$$\left[\alpha + \frac{k}{n}\right] = \begin{cases} a & \text{per } 0 \leq k \leq n - h - 1 \\ a + 1 & \text{per } n - h \leq k \leq n - 1 \end{cases}$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha + \frac{k}{n}\right] = na + h = [n\alpha].$$

∘ **4.25** – Gli interi non superiori ad $n$ e divisibili per $a$ sono $a, 2a, \ldots \left[\dfrac{n}{a}\right] \cdot a$, da cui l'asserto.

∘ **4.26** – I fattori di $n!$ divisibili per $p$ sono $\left[\dfrac{n}{p}\right]$ quelli divisibili per $p^2$ sono

$$\left[\frac{n}{p^2}\right], \text{ ecc., da cui } A(n,p) = \sum_{h=1}^{r}\left[\frac{n}{p^h}\right] \text{ ove } p^r \leq n < p^{r+1}.$$

## § 5 – Disuguaglianze

**5.1** – $r + \dfrac{1}{r} - 2 = \dfrac{(r-1)^2}{r} \geq 0.$

**5.2** – $\dfrac{a+c}{b+d} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{bc - ad}{b(b+d)} > 0;$
$\dfrac{a+c}{b+d} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{d(b+d)} < 0.$

**5.3** – $n \geq 2^k$ da cui $\log_{10} n \geq k \log_{10} 2$.

**5.4** – $\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - ab = \dfrac{1}{4}(a-b)^2 > 0;$

$$\left(\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right)^2 - ab = -ab\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} < 0.$$

Valgono le uguaglianze solo quando $a = b$.

5.5 – 1) Per $n = 2$ è vera;

$(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_{n-1}) >$

$> \{1-(a_1+a_2+\dots+a_n)\}\cdot(1-a_{n-1}) =$

$= 1-(a_1+a_2+\dots a_{n+1})+a_{n+1}(a_1+a_2+\dots a_n) >$

$> 1-(a_1+a_2+\dots+a_{n+1})$.

2) Ovvia.

5.6 – Poichè $\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}<\frac{4}{5},\dots,\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$ è $x<y$,

allora $x^2 < xy = \frac{1}{2n+1}$ da cui l'asserto.

5.7 – 1) e 2) da I.5.5 ponendo $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \alpha$.

3) $(1+\alpha)^n < \frac{1}{(1-\alpha)^n} < \frac{1}{1-n\alpha}$ per la 2).

4) Cambiare $\alpha$ in $-\alpha$ nella 3).

5) $(1+\frac{\alpha}{m})^m\cdot(1-\frac{\alpha}{n})^n < (1-\frac{\alpha^2}{m^2n^2})^{mn} < 1$.

5.8 – 7) Per I.5.7 è $(1+\frac{\alpha}{m})^{\frac{m}{k}}\cdot(1-\frac{\alpha}{n})^{\frac{n}{k}} < 1$

cioè $(1+\frac{\alpha/k}{m/k})^{\frac{m}{k}}\cdot(1-\frac{\alpha/k}{n/k})^{\frac{n}{k}} < 1$ cambiando $\frac{\alpha}{k}$ in $\alpha$ e

ponendo $\mu = \frac{m}{k}$ e $\nu = \frac{n}{k}$ si ha l'asserto.

3) Porre in 7) $\mu\alpha$ in luogo di $\alpha$ e 1 in luogo di $\nu$.

6) Porre in 7) $\nu\alpha$ in luogo di $\alpha$ e 1 in luogo di $\nu$.

1) Porre in 6) $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ in luogo di $\alpha$.

2) Porre in 1) $\mu\alpha$ in luogo di $\frac{1}{\mu}$ e 1 in luogo di $\mu$.

4) Porre in 3) $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ in luogo di $\alpha$.

5) Porre in 4) $\mu\alpha$ in luogo di $\alpha$ e $\frac{1}{\mu}$ in luogo di $\mu$.



∘∘ 5.9 – 7) Ponendo in 1) e 4) di I.5.8 $\frac{\alpha}{s}$ in luogo di $\alpha$ e $\frac{s}{r}$ in luogo di $\mu$ si ha $\left(1+\frac{\alpha}{s}\right)^s < \left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r$ per $0<s<r$.

Sia $\mu = (S,R)$ coppia di classi contigue di razionali positivi. Mostriamo che le classi contigue di elementi $\left(1+\frac{\alpha}{s}\right)^s$ con $s\in S$ e $\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r$ con $r\in R$ sono contigue. Sono separate pe le precedenti disuguaglianze; inoltre

$$0<\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r-\left(1+\frac{\alpha}{s}\right)^s =$$

$$=\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r\left\{1-\frac{1}{(1+\frac{\alpha}{r})^{r-s}}\cdot(1-\frac{r-s}{r+\alpha})^s\left(\frac{r}{s}\right)^s\right\}<$$

$$<\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r\left\{1-\frac{1}{1+\alpha\frac{r-s}{r}}\left(1-\frac{r-s}{r+\alpha}\right)^s\right\}<$$

$$<\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r\left\{1-\left(1-\alpha\frac{r-s}{r}\right)\left(1-\frac{r-s}{r+\alpha}\right)^s\right\};$$

se $s>1$ è

$$0<\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r-\left(1+\frac{\alpha}{s}\right)^s<\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r\cdot\left(\frac{\alpha}{r}+1\right)(r-s);$$

se $s<1$ è

$$0<\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r-\left(1+\frac{\alpha}{s}\right)^s<\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r\left(\frac{\alpha}{r}+\frac{1}{r+\alpha}\right)(r-s);$$

troncando superiormente $R$ è in ogni caso

$$0<\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r-\left(1+\frac{\alpha}{s}\right)^s<H\cdot(r-s),$$

quindi le due classi sono indefinitamente ravvicinate e individuano per definizione $\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)^\mu$.

In modo analogo si opera $\left(1-\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu$.

Il prodotto $\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)^\mu\cdot\left(1-\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu$ è quindi individuato da una coppia di classi contigue $(A,B)$ con gli elementi di $B$ minori di 1 per la 7) di I.5.8, da cui l'asserto.

Le rimanenti disuguaglianze si ottengono da quella appena dimostrate come in I.5.8.

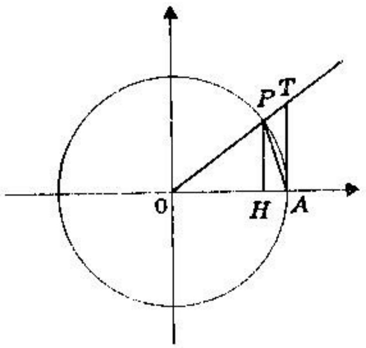
**5.10** – $\left(1+\dfrac{\nu(x-y)}{\mu x+\nu y}\right)^{\mu}\cdot\left(1-\dfrac{\mu(x-y)}{\mu x+\nu y}\right)^{\nu}<1$ da cui l'asserto.

**5.11** – $\widehat{PA}=a$

area $\quad POA=\dfrac{\sin a}{2}$

area sett. $POA=\dfrac{a}{2}$

area $\quad TOA=\dfrac{\tan a}{2}$




per le ovvie inclusioni è $\sin a<a<\tan a$, da cui dividendo per $\sin a$ invertendo si ha l'asserto.

**5.12** – Per I.5.7 è $a<\left(1+\dfrac{a-1}{n}\right)^{n}$ da cui l'asserto.

∘∘ **5.13** – $$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{a_i^p}{A^p}\right)^{1/p}\cdot\left(\frac{b_i^q}{B^q}\right)^{1/q}\le\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{a_i^p}{A^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b_i^q}{B^q}\right)=$$
$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$
da cui l'asserto.

**5.14** – $$\sum_{i=1}^{N}b_i\cdot 1\le\left(\sum_{i=1}^{N}1^{\frac{\nu}{\nu-1}}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}b_i^{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}=$$
$$=N^{\frac{\nu-1}{\nu}}\left(\sum_{i=1}^{N}b_i^{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}$$
da cui l'asserto.

**5.15** – Da I.5.10 passando ai logaritmi.



**5.16** – Per $N=2$ è la I.5.15. Supponiamola vera per $N-1$.
$$\log_a\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i\right)=\log_a\left(\mu_1x_1+\sum_{i=2}^{N}\mu_i x_i\right)=$$
$$\log_a\left(\mu_1x_1+(1-\mu_1)\sum_{i=2}^{N}\frac{\mu_i}{1-\mu_i}x_i\right)\ge$$
$$\ge\log_a x_1+(1-\mu_1)\cdot\log_a\left(\sum_{i=2}^{N}\frac{\mu_i}{1-\mu_1}x_i\right)\ge\sum_{i=1}^{N}\mu_i\log_a x_1$$
per l'ipotesi di induzione.

∘ **5.17** – La parte a destra si ottiene passando ai logaritmi e usando la I.5.16.
La parte a sinistra si ottiene ponendo $b_i=\dfrac{1}{a_i}$ ed usando la disuguaglianza di destra.

∘ **5.18** – $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i}=n+1,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i}=\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{i}\right)=n+s_n$, e per la I.5.17 segue la parte destra.
La parte sinistra si ottiene facendo la media armonica degli

$$a_i=\frac{i+1}{i}.$$

∘ **5.19** – $(k+1)^{1+\alpha}>k^{1+\alpha}+(1+\alpha)k^{\alpha},(k-1)^{1+\alpha}>k^{1+\alpha}-(1+\alpha)k^{\alpha}$
da cui
$\dfrac{k^{1+\alpha}-(k-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}<k^{\alpha}<\dfrac{(k+1)^{1+\alpha}-k^{1+\alpha}}{1+\alpha}$ e, sommando rispetto a $k$ da 1 a $n$, segue l'asserto.

∘∘ **5.20** – 3) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}=\dbinom{2n}{n}=\dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n!}$
è intero e i primi $p$ con $n<p\le 2n$ stanno nel numeratore e non nel denominatore; di conseguenza per la 2) segue l'asserto.

4) $$\prod_{\substack{\left[\frac{m}{2^k}\right]+1<p\le 2\left[\frac{m}{2^k}\right]+2\\ p\ \text{primo}}}p\le 2^{2\left[\frac{m}{2^k}\right]}\le 2^{\frac{m}{2^{k-1}}}$$

per la 3), quindi

$$\prod_{\substack{p \le m \\ p \text{ primo}}} p \le \prod_{k=1}^{H} 2^{\frac{m}{2^{k-1}}} = 2^{m \cdot \sum_{k=1}^{H} \frac{1}{2^{k-1}}} < 2^{2m} \text{ per la I.2.5.}$$

## § 6 – Disequazioni

**6.1 –** 1) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$.

2) La disequazione equivale a $-6x^2 - x + 1 > 0$ per $x \ge 0$ ed ha soluzione $0 \le x < \frac{1}{3}$, ed a $-6x^2 + x + 1 > 0$ per $x < 0$ che ha soluzione $-\frac{1}{3} < x < 0$.

La soluzione è quindi $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

**6.2 –** 1) $x > 1$.

2) $-1 \le x \le 1, \quad x \ge 2$.

**6.3 –** $a \ge 0: \quad x \le 1;$

$-1 < a < 0: \quad x \le -\sqrt{-a}, \quad \sqrt{-a} \le x \le 1;$

$a \le -1: \quad x \le -\sqrt{-a}, \quad 1 \le x \le \sqrt{-a}$ .

**6.4 –** 1) $E.: x \ne 0, x \ne 2$; soluzione: $0 < x < 2$.

2) $E.: x \ne \pm 1$; $\frac{x-4}{x^2-1} \le 4$ per $x < -1$, $0 \le x \le \frac{1}{4}$, $x > 1$, $\frac{x-4}{x^2-1} > 2$ per $-1 < x < 1$, la soluzione è $0 \le x \le \frac{1}{4}$.

3) $E.: x \ne 1$; soluzione

$-1 < x < \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} < x < \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.



**6.5 –** $E: x \ne -\frac{1}{c}$ per $c \ne 0$; soluzione:

$c > 0: -\frac{1}{c} < x < 3; \quad c = 0; x < 3;$

$-\frac{1}{3} < c < 0: x < 3, x < -\frac{1}{c}; \quad c = -\frac{1}{3}: x \ne 3;$

$c < -\frac{1}{3}: x < -\frac{1}{c}, \ x > 3.$

**6.6 –** 1) $E.: x \ge 2$ ; soluzione : $x \ge 2$.

2) $E.: x \ge 1$ ; soluzione : $x \ge 1$.

3) $E.: x \le 1, x \ge 4$ ; per $x \le 1$ nessuna soluzione poichè il secondo membro è negativo o nullo, per $x \ge 4$ elevando a quadrato si ottiene la soluzione $x \ge 4$.

2) $E.: x < 0, \ x \ge 2$; $\frac{-1+\sqrt{x^2-2x}}{2x} > 0$ per $1-\sqrt{2} < x < 0$ , $x > 1+\sqrt{2}$;

$\frac{-1+\sqrt{x^2-2x}}{2x} < 1$ per $x < -1+\sqrt{\frac{2}{3}}$ , $x \ge 2$; soluzione

$1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{\frac{2}{3}}$ , $x > +\sqrt{2}$.

**6.7 –** $E.: x \le -2$ , $x > 0$ ; soluzione : $-1-\sqrt{3} < x < -2$.

**6.8 –** $E.: c > 0$ , $x \ge 0$ ; $c = 0$ : $x > 0$ ;

$c < 0$ : $-\sqrt{-c} < x \le 0$ , $x > \sqrt{-c}$;

soluzione:

$0 < c < \frac{1}{4}$ : $0 \le x < \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ ,

$x > \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ ; $c = 0$ : $x > 1$;

$c < 0$ : $\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2} < x \le 0$ , $x > \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$.

**6.9 –** $E.: x \ne \pm 1$ ; $\frac{\sqrt[3]{x}-2}{1-\sqrt[3]{x^2}} > -3$

per $x < -1$ , $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)^3 < x < \left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^3$ ,

$x > 1$ ; $\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{1-\sqrt[3]{x^2}} \leq 0$

per $-1 < x < 1$ , $x \geq 8$; la soluzione è

$$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)^3 < x < \left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^3 \quad , \; x \geq 8.$$

**6.10 –** 1) $E.$ : $x < -1$ , $x > 1$ ; soluzione $x < -2$ , $1 < x < 2$.

2) $E.$ : $x > 2 + e^{-1}$ ; soluzione $2 + e^{-1} < x < 2 + e^{2+2\sqrt{2}}$ .

**6.11 –** 1) soluzione : $x < \dfrac{\pi}{4}$ , $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi (k = 1, 2, 3, \ldots)$.

2) $E.$ : $x \neq \pm \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi$ , $(k = 0, \pm 1, \ldots)$;

soluzione : $\left(2k + \dfrac{1}{6}\right)\pi \leq x < \left(2k + \dfrac{2}{3}\right)\pi$ ;

$\left(2k + \dfrac{5}{6}\right)\pi \leq x < \left(2k + \dfrac{4}{3}\right)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots)$.

**6.12 –** 1) $E.$ : $0 < x < \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5}{6}\pi < x < 2\pi$;

soluzione :
$\arcsin(\sqrt{2}-1) < x < \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5}{6}\pi < \pi - \arcsin(\sqrt{2}-1)$,

($\arcsin(u)$ è inteso in senso elementare).

2) $E.$ : $x \neq \dfrac{\pi}{4}$, $x \neq \dfrac{5}{4}\pi$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}, x \neq \dfrac{3}{2}\pi$;

soluzione: $\arctan 2 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi$,

$\arctan 2 + \pi \leq x < \dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{3}{2} < x \leq 2\pi$

($\arctan(u)$ è inteso in senso elementare).

**6.13 –** $\operatorname{Ch} x < 3$ equivale a $e^{2x} - 6e^x + 1 < 0$, da cui

$-\ln(3 + 2\sqrt{2}) < x < \ln(3 + 2\sqrt{2})$

2) $x > \ln(1 + \sqrt{2})$.

3) $x > \dfrac{1}{2}\ln 3$.



**6.14 –** $E.$ : $x \neq \dfrac{1}{2}\ln 3$

soluzione : $0 < x < \dfrac{1}{2}\ln 3$, $x > \dfrac{1}{2}\ln 3$.

**6.15 –** 1) $E.$ : $x \neq \ln\dfrac{1}{2}$, $x \neq \ln 2$;

soluzione: $x < \ln\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

$-\ln 2 < x < \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $x > \ln 2$

2) $E.$ : $x \geq \ln 2$, $x \neq \ln 4$

soluzione: $\ln 4 < x \leq \ln 6$.

**6.16 –** $E.$ : $x \neq \dfrac{\pi}{2}$, $x \neq \dfrac{\pi}{4}$, $x \neq \dfrac{3}{4}\pi$;

soluzione : $0 \leq x < \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3}{4}\pi < x < \pi$.

**6.17 –** $E.$ : $x < -1$, $0 < x < 1$, $1 < x < 1 + \sqrt{e}$, $x > 1 + \sqrt{e}$;

soluzione : $x < -1$, $\dfrac{1}{3} \leq x < 1$, $1 < x < 1 + \sqrt{e}$.

**6.18 –** $E.$ : $x \leq -2$, $1 < x < \dfrac{3}{2}$, $x \geq 2$;

soluzione : $\dfrac{-5 - \sqrt{177}}{4} < x \leq -2$, $2 \leq x < \dfrac{-5 + \sqrt{177}}{4}$.

**6.19 –** $E.$ : $x \neq -\ln(1 + \sqrt{2})$, $x \neq 0$;

soluzione : $1 < \operatorname{Sh} x \leq 2$, $\operatorname{Sh} x \geq 3$

cioè $\ln(1 + \sqrt{2}) < x \leq \ln(2 + \sqrt{5})$, $x \geq \ln(3 + \sqrt{10})$.

**6.20 –** $E.$ : $x \neq 1$, $x \neq c$; $x < c$, $x > 1$ per $c \leq 1$;
$x < 1$, $x > c$ per $c > 1$.

Soluzione : $x < \dfrac{c\sqrt{e} - 1}{\sqrt{e} - 1}$, $x > 1$ per $c \leq 1$;

$x < 1$, $x > \dfrac{c\sqrt{e} - 1}{\sqrt{e} - 1}$ per $c > 1$.

**6.21 –** $E.$ : $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ;
Soluzione : $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .

**6.22 –** $E.$ : $x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi^2}{9},\ x \neq \pi^2,\ x \neq \frac{25}{9}\pi^2,\ x \neq 4\pi^2.$

Soluzione: $\frac{\pi^2}{64} \leq x < \frac{\pi^2}{9},\ \frac{25}{64}\pi^2 \leq x < \pi^2,$

$\frac{81}{64}\pi^2 \leq x \leq \frac{169}{64}\pi^2,\ \frac{25}{9}\pi^2 < x < 4\pi^2.$

**6.23 –** $E.$ : $-8 < x < 1,\ x > 8,\ x \neq 0;$

soluzione : $-8 < x \leq \left(\frac{1-\sqrt{33}}{4}\right)^3,\ 8 < x \leq 64.$

**6.24 –** $E.$ : $-27 < x < -8,\ x > 1;$

soluzione : $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^3 \leq x \leq -8,\ x \geq \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^3.$

**6.25 –** $E.$ : $x \neq k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

soluzione : $\left(\frac{2}{5} + 2k\right)\pi < x < \left(\frac{4}{5} + 2k\right)\pi,$

$(2k-1)\pi < x < \left(2k - \frac{3}{5}\right)\pi,$

$\left(2k - \frac{1}{5}\right)\pi < x < 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$

**6.26 –** $E.$ : $x \neq \pm 1;$

soluzione : $x < -1,\ -1 < x < 1,\ 1 < x \leq \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$

**6.27 –** $E.$ : $x < 1,\ x \neq -1;$

soluzione : $x < -3,\ -1 < x < 1.$

**6.28 –** $E.$ : $\operatorname{Sh} x \leq \frac{1}{2},\ \operatorname{Sh} x \geq 2,\ \operatorname{Sh} x \neq \pm 1;$

soluzione : $\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \leq x < \ln\left(1+\sqrt{2}\right),$

$\ln(1+\sqrt{2}) < x \leq \ln(2+\sqrt{5}).$



**6.29 –** 1) $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4},\ 0 < x < \frac{\pi}{4},\ x \neq -\arctan\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$

$x \neq \arctan\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$

2) $-1 < x < -\frac{1}{2},\ 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$1 < x \leq \pi.$

Capitolo II

# CAMPO COMPLESSO

## § 1 – Operazioni sui numeri complessi

**1.1** – $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = i$; $\quad -i$; $\quad -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$; $\quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$;

$2 + i\, 2\sqrt{3}$; $\quad -\dfrac{5}{2} + i\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$; $\quad -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

**1.2** – $2i$ ; $-2+2i$ ; $-4$ ; $-4-4i$.

$-2i$ ; $-2-2i$ ; $-4$ ; $-4+4i$.

**1.3** – $\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$; $\qquad \cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi$;

$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\qquad \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi + i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$;

$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$; $\qquad \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$;

$2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; $\qquad 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$;

$\sqrt{2^n}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$; $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$.

**1.4** – $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; $\qquad \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi + i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$;

$\dfrac{1}{8}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$; $\qquad \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\pi\right)$;

$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{6}\pi + i\sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$; $\qquad \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{19}{48}\pi + i\sin\dfrac{19}{48}\pi\right)$;

$\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{43}{48}\pi + i\sin\dfrac{43}{48}\pi\right)$; $\qquad \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{67}{48}\pi + i\sin\dfrac{67}{48}\pi\right)$;

$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{91}{48}\pi + i\sin\frac{91}{48}\pi\right); \qquad \frac{1}{\sqrt{2^5}}\left(\cos\frac{25}{12}\pi + i\sin\frac{25}{12}\pi\right).$$

**1.5** – $19 + 33i$ ; $50$ ; $\frac{9}{50} + \frac{37}{50}i$ ; $\left(2+\sqrt{3}\right) + i\left(2\sqrt{3}-1\right)$ ;

$\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{53}{28}\pi + i\sin\frac{53}{28}\pi\right)$ ; $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{5}{4}i$.

**1.6** – $z = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$ ;

$\overline{z} = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$ ;

$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$.

**1.7** – $\left(\frac{a+bi}{a-bi}\right)^2 - \left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)^2 = 2i\ \mathrm{Im}\left\{\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right)\right\}$

poichè $z - \overline{z} = 2i\ \mathrm{Im}\ z$,

$$\mathrm{Im}\left\{\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right)^2\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{(a^2-b^2+2i\ ab)^2}{(a^2+b^2)^2}\right\} =$$

$$= \frac{4ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}.$$

**1.8** – $|z|^2 - (|\ \mathrm{Re}\ z| + |\ \mathrm{Im}\ z|)^2 = -2|\ \mathrm{Re}\ z|\cdot|\ \mathrm{Im}\ z| \le 0$;

$2|z|^2 - (|\ \mathrm{Re}\ z| + |\ \mathrm{Im}\ z|)^2 = (|\ \mathrm{Re}\ z| - |\ \mathrm{Im}\ z|)^2 \ge 0$.

A destra vale l'uguaglianza se e solo se $z$ è puramente reale o immaginario; a sinistra se e solo se

$$\arg z = \frac{3}{4}\pi,\quad \frac{5}{4}\pi,\quad \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi.$$

**1.9** – $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2) + (z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2) =$
$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

**1.10** –
$$(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^5 =$$
$$= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\cos^k\theta\cdot i^{5-k}\cdot\sin^{5-k}\theta.$$

Uguagliando le parti reali e le parti immaginarie si ottiene:

1) $\cos 5\theta = 16\cos^2\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$,

2) $\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1$.



**1.11** – Moltiplicando $1 - 3i$ rispettivamente per $\exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)$ e $\exp\left(\frac{4}{3}\pi i\right)$ (radici cubiche dell'unità) si ha

$$\frac{3\sqrt{3}-1}{2} + \frac{3+\sqrt{3}}{2}i \ \text{e}\ -\frac{3\sqrt{3}+1}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2}i.$$

**1.12** – Vera per $n = 0$, ammessa vera per $n = 4h$ dimostriamola vera per $n = 4(h+1)$.

$$\frac{4h+2-4hi}{2} + (4h+2)i - (4h+3) - (4h+4)i + 4h + 5 =$$
$$= \frac{4(h+1)+2-4(h+1)i}{2} =$$
$$= \frac{(n+4)+2-(n+4)i}{2}.$$

$n \equiv 1 \pmod 4$

$$1 + 2i + \ldots + (n+1)i^n =$$
$$= \frac{(n-1)+2-(n-1)i}{2} + i(n+1) =$$
$$= \frac{n+1+(n+3)i}{2};$$

$n \equiv 2 \pmod 4$ $\quad \frac{(n+2)i-(n+2)}{2}$;

$n \equiv 3 \pmod 4$ $\quad -\frac{(n+1)+(n+2)i}{2}$.

**1.13** – $(-1+i\sqrt{3})^n + (-1-i\sqrt{3})^n =$

$= 2\ \mathrm{Re}\left(\left\{2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^n\right) = 2^{n+1}\cos\frac{2n}{3}\pi$,

per $n \equiv 0 \pmod 3$ è $\cos\frac{2n}{3}\pi = 1$,

per $n \equiv 1, 2 \pmod 3$ è $\cos\frac{2n}{3}\pi = -\frac{1}{2}$.

**1.14** – $z = \exp(i\theta)$ $\quad \theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, posto $t = \cot\frac{\theta}{2}$ è $z = \frac{t+i}{t-i}$.

**1.15 –** La prima la seconda e l'ultima uguaglianza non hanno significato in quanto contengono espressioni a più valori.

**1.16 –** $\dfrac{(c+|c|)^2}{c} = \dfrac{c^2+\bar{c}c+2c|c|}{c} = 2\ \mathrm{Re}\ c + 2|c| \geq 0,$
l'uguaglianza vale se e solo se $c \in \mathbb{R}^-$.
Da $\dfrac{(c+|c|)^2}{c} = \alpha > 0$ segue $\left(\dfrac{c+|c|}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = c$; se $\alpha = 0$ $c \in \mathbb{R}^-$ e ha una radice quadrata.

**1.17 –** $$\left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right| = |\alpha^{n-1} + \beta\alpha^{n-2} + \ldots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}| \leq |\alpha|^{n-1} +$$
$$+ |\beta| \cdot |\alpha|^{n-2} + \ldots + |\beta|^{n-1} = \frac{|\alpha|^n - |\beta|^n}{|\alpha| - |\beta|}.$$

○○ **1.18 –** Da (1) e (2) seguono
$2^{n-1} = a_n + c_n = b_n + d_n,$
$4^{n-1} = a_n^2 + 2a_nc_n + c_n^2 = b_n^2 + 2b_nd_n + d_n^2,$
dalla (3) è
$$2^n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 - 2(a_nc_n + b_nd_n)$$
ed eliminando i prodotti misti mediante l'identità precedente si ottiene l'asserto.
Dimostrazione per induzione: per $n = 1$ è valida; la relazione
$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$
fornisce le identità (4)
$$a_{n+1} = a_n + d_n, \quad b_{n+1} = b_n + a_n,$$
$$c_{n+1} = c_n + b_n, \quad d_{n+1} = d_n + c_n,$$
quadrando e sommando si ottiene
$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + 2B_n,$
ove
$2B_n = 2(a_nb_n + b_nc_n + c_nd_n + d_na_n) =$
$= (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 - (a_n + c_n)^2 - (b_n + d_n)^2 =$



$= (2^n)^2 - 2(2^{n-1})^2 = 2 \cdot 4^{n-1},$
da cui, ammettendo vera l'uguaglianza per $n$, si ottiene
$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = 2 \cdot 2^{n-1}(2^{n-1}+1) + 2 \cdot 4^{n-1} =$$
$$= 2^n(2^n + 1).$$
Da $B_n = 4^{n-1}$ e dalle (4) si ottiene l'identità
$$a_na_{n+1} + b_nb_{n+1} + c_nc_{n+1} + d_nd_{n+1} = 2^{n-1}(2^n + 1).$$

○ **1.19 –** Sia $i > 0$, allora $-i = (i)^3 > 0$, assurdo.
Sia $i < 0$, allora $-1 = (i)^2 > 0$ e $1 = (i)^4 > 0$, assurdo.

## § 2 – Equazioni e identità nel campo complesso

**2.1 –** 1) e 2) seguono immediatamente dalla definizione; 4) e 5) sono conseguenza della 3). Proviamo ora la 3):
$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$
$\exp(z_1 + z_2) = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2))$, poichè
$\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2) = (\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2)$,
segue l'asserto.

**2.2 –** Posto $\omega = x + iy$, deve essere $\exp(x+iy) = \rho\exp(i\theta)$ da cui $e^x = \rho$ e $y \equiv \theta (\mathrm{mod}\, 2\pi)$. Quindi $x = \ln\rho$ e $y = \theta + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

**2.3 –** 1) $z - 1 = \exp i\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3}\right)$, $k = 1, 0, 2$, da cui $z_0 = 1 + i$,
$$z_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad z_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$
2) $z = \exp(3 + 5i) = e^3(\cos 5 + i\sin 5)$.
3) $\exp z = i + \sqrt{-9} = i \pm 3i$.
$$z = \log 4i = \ln 4 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

$$z = \log(-2i) = \ln 2 + i\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

4) $\log \overline{z} = -1 \pm (1+2i)$

$\overline{z} = \exp(2i) \qquad z = \cos 2 - i \sin 2$

$\overline{z} = \exp(-2-2i) \quad z = e^{-2}(\cos 2 + i \sin 2).$

**2.4 –** 1) $\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^5 = 1$ implica $\dfrac{1-z}{1+z} = \exp\left(\dfrac{2k\pi}{5} i\right)$

$k = 0,1,2,3,4$; da cui

$$z = \frac{1 - \exp\left(\frac{2k\pi}{5} i\right)}{1 + \exp\left(\frac{2k\pi}{5} i\right)}.$$

2) $c \geq 0: \quad \dfrac{z-1}{z+1} = \sqrt[n]{c} \exp\left(\dfrac{2k\pi}{n} i\right) \quad k = 0,1,\dots,n-1,$

$$z = \frac{1 + \sqrt[n]{c}\exp\left(\frac{2k\pi}{5} i\right)}{1 - \sqrt[n]{c}\exp\left(\frac{2k\pi}{n} i\right)} \quad (\text{per } c = 1,\ k = 1,2,\dots,n-1,)$$

$c < 0: \quad \dfrac{z-1}{z+1} = \sqrt[n]{-c}\exp\left(\dfrac{2k+1}{n}\pi i\right) \quad k = 0,1,\dots,n-1,$

$$z = \frac{1 + \sqrt[n]{-c}\exp\left(\frac{2k+1}{5}\pi i\right)}{1 - \sqrt[n]{-c}\exp\left(\frac{2k+1}{n}\pi i\right)}.$$

**2.5 –** $z + 1 = \exp(2ia)\cdot\exp\left(\dfrac{2k\pi}{n} i\right) \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1,$

$a \in \mathbb{R}: \qquad z = \exp\left\{\left(\dfrac{2k\pi}{n} + 2a\right) i\right\} - 1,$

$a = 5i: \qquad z = e^{-10}\cdot\exp\left(\dfrac{2k\pi}{n} i\right) - 1,$

$a = 3+5i: \quad z = e^{-10}\cdot\exp\left\{\left(\dfrac{2k\pi}{n} + 6\right) i\right\} - 1.$



**2.6 –** $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\dfrac{2k+1}{4}\right) \qquad k = 0,1,2,3.$

$$4z^4 + 1 = \frac{1}{4}(2z-1-i)(2z-1+i)(2z+1-i)(2z+1+i) =$$
$$= (2z^2 - 2z + 1)(2z^2 + 2z + 1).$$

**2.7 –** Le 1) e 2) seguono da II.2.1
Le 3) si ottengono immediatamente dalla definizione.

**2.8 –** La 1) e la 2) seguono dalla definizione II.2.7, tenendo presente la 3) di II.2.9.
La 3) e la 4) seguono dalla 1) e dalla 2), tenendo presente la 3) di II.2.7.

**2.9 –** 1) $\cos(iz^2) + i\sin(i\, z^2) = \exp(-z^2)$

quindi $\quad z^2 = 2\,k\pi i, \ k \in \mathbb{Z};$

per $k \geq 0: \quad z = \pm\sqrt{2k\pi}\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}\right),$

per $k < 0: \quad z = \pm\ \sqrt{-2\,k\pi}\exp\left(i\dfrac{3}{4}\pi\right).$

2) $\mathrm{Ch}(z^2) + \mathrm{Sh}(z^2) = \exp z^2 \neq 0$ sempre.

**2.10 –** $\dfrac{2\pi z}{1+z^2} = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$

per $k = 0,\ z = 0,$ per $k \neq 0 \quad z = \dfrac{1 \pm i(k^2-1)^{1/2}}{k},$

$$|z|^2 = \frac{1 + k^2 - 1}{k^2} = 1.$$

Le soluzioni sono simmetriche rispetto ad ambedue gli assi.

**2.11 –** $|2i - \alpha^3|^2 + |2i + \alpha^3|^2 = (2i - \alpha^3)(-2i + \overline{\alpha}^3) +$
$+ (2i + \alpha^3)(-2i + \overline{\alpha}^3) = 10$

$z^5 = 10(1-i), \ z = \sqrt[10]{200}\cdot\exp\left\{\left(\dfrac{7}{20}\pi + \dfrac{2k\pi}{5}\right) i\right\}$

$k = 0,1,2,3,4.$

**2.12** – $|\cos iz + \operatorname{Sh} z| = |\exp z|$, posto $z = x + iy$ si ha
$e^x = e^{-y}\exp(ix)$ da cui $x = 2k\pi$, $y = -2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

**2.13** – $\left|\dfrac{1+ia}{1-ia}\right| = 1$ quindi deve essere $\left|\dfrac{1+iz}{1-iz}\right|^2 = \dfrac{(1-y)^2+x^2}{(1+y)^2+x^2} = 1$
ove $z = x + iy$, da cui $y = 0$, si hanno quindi $m$ radici reali.
Eguagliando gli argomenti si ha

$$2m \arctan x = 2\arctan a + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z},$$

da cui

$$x = \tan\left\{\frac{1}{m}\arctan a + \frac{k\pi}{m}\right\} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

**2.14** – $$(\cot\theta + i)^n = \sqrt{(1+\cot^2\theta)^n}\cdot\exp(i\,n\theta),$$
e dall'uguaglianza $\operatorname{Re} z = \cot\alpha \cdot \operatorname{Im} z$, ove $z = \rho\exp(i\alpha)$, segue l'asserto.

**2.15** – $$\left|\frac{1+i\tan\frac{\theta}{2}}{1-i\tan\frac{\theta}{2}}\right| = 1 \quad , \quad \left(\frac{1+i\tan\frac{\theta}{2}}{1-i\tan\frac{\theta}{2}}\right) \equiv \theta \pmod{2\pi}$$
da cui l'asserto.

**2.16** – $$\alpha_1 = \exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) \quad , \quad \alpha_2 = \exp\left(-\frac{\pi}{6}i\right),$$
quindi

$$w_1(m) = w_2(m) = 2\cos\frac{m\pi}{6}.$$

I valori distinti sono $0, \pm 1, \pm\sqrt{3}, \pm 2$.

**2.17** – Posto

$$z = x + iy, \quad a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2, \quad c = c_1 + ic_2,$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (a_1+b_1)x + (b_2-a_2)y + c_1 = 0 \\ (a_2+b_2)x + (b_1-a_1)y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Affinchè abbia una sola soluzione deve essere $|a| \neq |b|$.



**2.18** – Vedi I.4.17.

**2.19** – $P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n = 0$, passando ai coniugati e tenendo conto che $a_i \in \mathbb{R}$ si ha
$a_0 + a_1\overline{\alpha} + \ldots + a_n\overline{\alpha}^n = P(\overline{\alpha}) = 0$.

**2.20** – Se $z_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$, sono le radici n–esime di $a$, è

$$z^n - a = \prod_{i=1}^n (z - z_i), \quad \text{da cui} \quad -a = (-1)^n \prod_{i=1}^n z_i,$$

cioè $\displaystyle\prod_{i=1}^n z_i = (-1)^{n+1}a$.

○ **2.21** – Se $r = hn$ è $z_k^r = a^h = a^{r/n}$, quindi

$$\sum_{k=1}^n z_k^r = n\, a^{r/n}.$$

Se $r \not\equiv 0 \pmod n$, posto $z_k = z_1\omega^{k-1}$, è

$$\sum_{k=1}^n z_k^r = z_1^r \sum_{k=1}^n \omega^{r(k-1)} = z_1^r \cdot \frac{1-\omega^{rn}}{1-\omega^r} = 0.$$

○ **2.22** – 1) $$(1-z)P(z) = \prod_{k=1}^n\left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) - z\right) = (-1)^n(z^n - 1) =$$
$$= (-1)^{n-1}(1-z)\sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

da cui $P(z) = (-1)^{n-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ e $P = P(1) = (-)^{n-1}(n-1)$.

2) $$P^2 = S^2\prod_{k=1}^{n-1}\left\{-4\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right\} =$$
$$= (-1)^{n-1}4^{n-1}S^2\prod_{k=1}^{n-1}\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) =$$
$$= (-1)^{n-1}4^{n-1}S^2(-1)^{n+1}, \text{ (II.2.20) da cui}$$

$S^2 = \dfrac{(n-1)^2}{4^{n-1}}$ ed essendo S positivo è $S = \dfrac{n-1}{2^{n-1}}$.

**2.23 –** $Q(z) = z^n - 1, \ \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{4-z_k}{2-z_k}\right) = \frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{4^n-1}{2^n-1} = 2^n+1.$

**∘ 2.24 –** $$\frac{1}{2\,n}\sum_{q=-n}^{n-1}\left(\sum_{r=-n}^{n-1} a_r \exp\left(irq\frac{\pi}{n}\right)\right)\cdot\exp\left(-ipq\frac{\pi}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\,n}\sum_{r=-n}^{n-1} a_r \ \sum_{q=-n}^{n-1}\exp\left\{iq\frac{\pi}{n}(r-p)\right\},$$ per II.2.21 è
$$\sum_{q=-h}^{n-1}\exp\left\{iq\frac{\pi}{n}(r-p)\right\} = \begin{cases} 0 & \text{per } r \neq p \\ 2n & \text{per } r = p\end{cases}$$
da cui segue l'asserto.

**∘ 2.25 –** $$\left|\frac{\exp(-xu)-1}{u}\right| = \frac{2}{|u|}\cdot\left|\sin\frac{x\,u}{2}\right| \leq \frac{2}{|u|}\cdot\frac{|x|\cdot|u|}{2} = |x|.$$

**∘ 2.26 –** $$\sum_{1\leq i<j\leq n}|a_i\overline{b}_j - a_j\overline{b}_i|^2 = \sum_{i\neq j}|a_i|^2\cdot|b_j|^2 - \sum_{i\neq j}^{n} a_i b_i \overline{a}_j\overline{b}_j$$
quindi il secondo membro è
$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot|b_i|^2 + \sum_{i\neq j} a_i b_i\overline{a}_j\overline{b}_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_i \overline{a}_j\overline{b}_j =$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2\cdot\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2$$
disuguaglianza di Cauchy.

## § 3 – Trasformazioni del piano complesso

**3.1 –** $z_0 = \rho\exp(i\theta) = x + iy.$

1) $-z_0 = -x - iy = \rho\exp(i(\theta+\pi)) =$
$= \rho(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)),$

2) $\overline{z}_0 = x - iy = \rho\exp(-i\theta) =$
$= \rho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)),$



3) $-\overline{z}_0 = -x + iy = \rho\exp(-i(\theta+\pi)) =$
$= \rho(\cos(-\theta-\pi) + i\sin(-\theta-\pi)),$

4) $i\overline{z}_0 = y + ix = \rho\exp(i(\frac{\pi}{2}-\theta)) =$
$= \rho(\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) + i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)),$

5) $i\overline{z}_0 = -y - ix = \rho\exp(-i(\frac{\pi}{2}+\theta)) =$
$= \rho(\cos(-\frac{\pi}{2}-\theta) + i\sin(-\frac{\pi}{2}-\theta)),$

**3.2 –** 1) Striscia verticale.

2) Striscia orizzontale.

3) Iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = c$.

4) Iperbole di equazione $2xy = c$.

5) Cerchio di centro 0 e di raggio $\sqrt[3]{2}$ privato della circonferenza.

6) Parte esterna al cerchio di centro 0 e raggio $\frac{1}{c}$ e circonferenza di centro 0 e raggio $\frac{1}{c}$.

7) Cerchio di centro 0 e raggio $\frac{1}{c}$ privato del centro.

8) Semipiano dei reali non negativi.

9) Cerchio di centro $z = -5$ e raggio $\sqrt{5}$.

10) Retta $x = 1/2$.

11) Posti $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \ \beta = \beta_1 + i\beta_2$, si ha la circonferenza (retta per $c = 1$) di equazione
$$(x^2+y^2)(c^2-1) + 2x(c^2\beta_1 + \alpha_1) + 2y(c^2\beta_2 + \alpha_2) + $$
$$+ c^2|\beta|^2 - |\alpha|^2 = 0.$$

**3.3 –** 1) $w_1 = z_1 - z_3, \ \ w_2 = z_2 - z_3, \ \ w_3 = 0$, poichè
$$z_2\hat{z}_2 z_1 = w_2\hat{w}_3 w_1 \equiv \arg\frac{w_1}{w_2} = \arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right) \pmod{2\pi},$$
si ha l'asserto.

2) Conseguenza di 1).

3.4 – $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ , $z = x + iy$ allora

$$\alpha z + \overline{\alpha z} + c = 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y + c = 0.$$

Viceversa data la retta $ax + by + c = 0$ basta porre $z = x + iy$ e $\alpha = \frac{a}{2} - i\frac{b}{2}$.

3.5 – $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ ,
$az\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + c = a(x^2 + y^2) + 2\beta_1 x - 2\beta_2 y + c = 0.$
Perchè le circonferenze siano reali deve essere $|\beta|^2 \geq ac$.

3.6 – La prima è ovvia per il significato del modulo, la seconda si ottiene quadrando la prima.

3.7 – $|z - i| = |z + 3i + 4|$ asse del segmento di estremi $i$ e $-3i - 4$. L'equazione di tale asse in coordinate cartesiane è $x+y+3 = 0$, il punto di minima distanza è $z = -\frac{3}{2}(1 + i)$.

3.8 – Le due condizioni equivalgono a $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$, striscia verticale.

3.9 – Da $\arg z \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ è $z = x + ix$ con $x > 0$, sostituendo si ottiene $x = 3$, cioè $z = 3(1 + i)$.

3.10 – $$\frac{z + 1 - i}{z + i} = \frac{(z + 1 - i)(\overline{z} - i)}{(\overline{z} - i)(z + i)} =$$
$$= \frac{z\overline{z} - 1 + \frac{z + \overline{z}}{2} - \frac{i}{2}\{(2 - i)z + (2 + i)\overline{z} + 2\}}{|z + i|^2}$$
deve essere $(2 - i)z + (2 + i)\overline{z} + 2 = 0$, retta vedi II.3.4.

3.11 – $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $|z - \alpha|^2 > |z - \overline{\alpha}|^2$ equivale a $(y - \alpha_2)^2 > (y + \alpha_1)^2$ da cui l'asserto.

3.12 – 1) Traslazione, nel caso $\beta = 0$ trasformazione identica; nessun punto unito; vengono mutate in sè le rette $\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + c = 0$ $(c \in \mathbb{R})$.



2) Omotetia, se $k = 1$ identità; $z = 0$ è unito; vengono mutate in sè le rette per l'origine.

3) Rotazione, se $\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ identità; $z = 0$ è unito; vengono mutate in sè le circonferenze $|z| = c$.

4) Roto–omotetia, se $\alpha = 1$ identità; $z = 0$ è unito; se $\alpha = k\exp(i\theta_\circ)$ vengono mutate in sè le spirali $z = k^{\theta/\theta_\circ}\exp(i\theta)$.

5) Inversione; $z = \pm 1$ sono uniti; vengono mutati in sè gli assi, la circonferenza $|z| = 1$ e le circonferenze ortogonali a $|z| = 1$.

3.13 – Se $\gamma = 0$ , $z' = \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}$ (roto–omotetia più traslazione).

Se $\gamma \neq 0$ , $z' = \frac{\alpha}{\delta} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma(\gamma z + \delta)}$ (roto–omotetia più traslazione, più inversione più roto–omotetia più traslazione).

∘ 3.14 – La translazione muta cerchi e rette in cerchi e rette.
Consideriamo l'equazione $az\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + c = 0$ $(a, c \in \mathbb{R}; \beta \in \mathbb{C})$ ed applichiamo le trasformazioni $z' = \frac{1}{z}$ e $z' = \alpha z$.
Si ottengono rispettivamente le equazioni

$$cz'\overline{z}' + \overline{\beta}z' + a = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{|\alpha|^2}z'\overline{z}' + \frac{\beta}{\alpha}\overline{z}' + c = 0,$$

quindi inversione e roto–omotetia mutano cerchi o rette in cerchi o rette.
Dal risultato di II.3.13 si ha l'asserto.

3.15 – $z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ da cui $\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0$.

Se $\gamma = 0$ e $\delta \neq \alpha$, sono uniti $z = \frac{\beta}{\delta - \alpha}$ e $z = \infty$;
se $\gamma = 0$ , $\delta = \alpha \neq 0$ , $\beta \neq 0$, è unito $z = \infty$, se $\beta = 0$ si ha l'identità; se $\gamma \neq 0$ sono uniti i due punti

$$z = \frac{\alpha - \delta + \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma}.$$

∘ 3.16 – Sia $\tau$ la trasformazione

$$z' = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)},$$

$\tau$ muta $z_1, z_2, z_3$ in $0, 1, \infty$; $\tau$ è invertibile ed è l'unica trasformazione che porta $z_1, z_2, z_3$ in $0, 1, \infty$ rispettivamente.
Sia $\tau'$ la trasformazione che muta $z_1', z_2', z_3'$ in $0, 1, \infty$.
Allora $\tau\tau'^{-1}$ muta $z_1, z_2, z_3$ in $z_1', z'_2, z_3'$.

3.17 – Poichè ogni trasformazione che muta l'asse reale in sè è composizione di due trasformazioni a coefficienti reali (II.3.16), $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ devono essere reali.
Deve inoltre essere $\operatorname{Im}\left(\dfrac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta}\right) > 0$, cioè $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$.

3.18 – $z' = \dfrac{3(z-5)}{z-2} - 3 = \dfrac{-9}{z-2}$ , $|z'| = \dfrac{9}{|z-2|} = 3$
da cui $|z-2| = 3$ è la trasformata di $|z'| = 3$.

3.19 – Lungo la linea $|z| = R$ è $-R \leq \operatorname{Re} z \leq +R$ , $z' = \dfrac{1}{2 \operatorname{Re} z}$
quindi $z' \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{1}{2R} \leq z'$ , $z' \leq -\dfrac{1}{2R}$.

3.20 – $|z+i| + |z-i| = 4$ luogo dei punti $z$ la cui somma delle distanze da $i$ e $-i$ è costante; ellisse di fuochi $i$ e $-i$ semiasse maggiore di lunghezza 2.
La linea trasformata è la stessa ellisse ruotata di $\dfrac{\pi}{2}$:

$$|z+1| + |z-1| = 4.$$

## Capitolo III

# SUCCESSIONI NUMERICHE

### § 1 – Limiti delle successioni. Simboli $\sim, o(\cdot), O(\cdot), \asymp$. Classe limite.

1.1 –

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \quad \left\{\frac{n}{n+1}\right\}, \quad \left\{n^2\right\},$$
$$\left\{\ln\frac{1}{n}\right\}, \quad \{n\cos n\pi\}, \quad \left\{\frac{4n}{n+(-1)^n}\right\},$$
$$\left\{\frac{4n}{n+1}\right\}, \quad \{2\arctan n\}, \quad \{2(\pi - \arctan n)\},$$
$$\{(-1)^n\}, \quad \{n^2(\cos n\pi - 1)\}, \quad \{(-1)^n \cdot n^2\}.$$

1.2 – Per ogni $\varepsilon > 0$

1) per $n \geq \overline{n}_1(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ è $1 - \varepsilon < \dfrac{n}{n+1} < 1$.

2) per $n \geq \overline{n}_2(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\ln(1+\varepsilon)}\right] + 1$ è $1 < e^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.

3) per $n \geq \max \overline{n}_1(\varepsilon), \overline{n}_2(\varepsilon)$ è $1 - \varepsilon < \dfrac{ne^{\frac{1}{n}}}{n+1} < 1 + \varepsilon$.

4) per $n \geq \overline{n}(\varepsilon) = \left[\dfrac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 12\varepsilon - 4}}{2}\right] + 1$ è $\dfrac{n^2+1}{n+3} > \varepsilon$.

1.3 – Per I.5.11 è definitivamente $|\sin a_n| \leq |a_n|$ da cui

$$\sin a_n \to 0 \quad \text{se} \quad a_n \to 0.$$

$$0 < 1 - \cos a_n = 2\sin^2\left\{\frac{a_n}{2}\right\} \to 0,$$

quindi $\cos a_n \to 1$

**1.4 –** $\sin a_n - \sin A = 2\cos\dfrac{a_n + A}{2}\sin\dfrac{a_n - A}{2} \to 0$ per III.1.3.

Analogamente

$\cos a_n - \cos A = -2\sin\dfrac{a_n + A}{2}\sin\dfrac{a_n - A}{2} \to 0$

**1.5 –** Per ogni $\varepsilon > 0$

1) $\left|1 + \dfrac{1}{m^2} - 1 - \dfrac{1}{n^2}\right| = \left|\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right| < \varepsilon$ per

$$n, m \geq \overline{n}_1(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$$

2) $\left|\cos\dfrac{1}{m} - \cos\dfrac{1}{n}\right| \leq \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right| < \varepsilon$ per

$$n, m \geq \overline{n}_2(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right] + 1$$

**1.6 –** 1) $\left|\dfrac{1 + (-1)^n}{2} - \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2}\right| = 1 \qquad$ per $n = 0.1.2\ldots$

2) $|s_{2n} - s_n| = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$.

**1.7 –** Per la condizione di Cauchy esiste $\overline{n}$ tale che per $n \geq \overline{n}$ è $|a_n - a_{\overline{n}}| < 1$, quindi $|a_n| < 1 + |a_{\overline{n}}|$;
posto $M = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{\overline{n}-1}|, 1 + |a_{\overline{n}}|)$
è $|a_n| \leq M$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ .

**1.8 –** Sia $K > |t_1|$, esiste $\overline{n}(k)$ tale che per $n \geq \overline{n}$ è $t_n > K$.
Allora

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(t_n) = \inf\{t_1, t_2, \ldots, t_{\overline{n}}\} =$
$= \min\{t_1, t_2, \ldots t_{\overline{n}}\} = \min\limits_{n\in\mathbb{N}}(t_n)$.

**1.9 –** Poiché $a_n \to A$ per $n \to +\infty$, $\{a_n\}$ è di Cauchy, quindi limitata (vedi III.1.7), allora $\sup\limits_n a_n = L < +\infty$, $\inf\limits_n a_n = l > -\infty$
(Questa proprietà si dimostra anche in modo diretto).
Se $l = A = L$, $\max\limits_n a_n = \min\limits_n a_n = A$ (successione costante)
Se $l < A < L$, sia $\overline{\varepsilon} = 1/2\min(L - A, A - l)$.
Esistono solamente $k$ elementi $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} > A + \varepsilon$



e $h$ elementi $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_h} < A - \varepsilon$ .
Quindi $L = \max(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$,
$l = \min(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_h})$.
Se $l = A < L$ si vede in modo analogo che $L = \max_n a_n$;
se $l < A = L$ è $\min\limits_n a_n$.

**1.10 –** Sia $A_h = \left\{a_i \in \{a_n\} : a_i > \dfrac{a_1}{2^h}\right\}$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$,
ogni $A_n$ è costituito da un numero finito di elementi e
$A_h \subseteq A_{h+1}$.
Sia $n_h = \max_{a_i \in A_h} i$, poiché $a_n \to 0$ e $a_n > 0$, gli indici $n_h$ non sono ripetuti infinite volte; quindi vi sono infiniti indici $n_h$ distinti per cui $a_{n_h} > a_{n_h+k}$ per $k = 1, 2, 3, \ldots$ .

**1.11 –** La disuguaglianza $|s_n - s_m| > ||s_n| - |s_m||$ mostra che se $\{s_n\}$ è di Cauchy lo è anche $\{|s_n|\}$.
La successione $\{(-1)^n\}$ mostra che non è vero il viceversa.

**1.12 –** 1) $+\infty$; 2) $+\infty$; 3) $1^-$; 4) $0^+$;

5) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^-$; 6) $5^-$; 7) $0^+$; 8) $1^+$;

9) 0; 10) $\dfrac{a+b}{2}$;

11) $c^-$ per $c > 1$, $c^+$ per $c < 1$;

12) $1^+$ per $c > 1$, $1^-$ per $c < 1$;

13) 0 per $x \neq 0$, 1 per $x = 0$;

14) $-\infty$; 15) $+\infty$;

16) $c^+$ per $c > 1$, $\left(\dfrac{1}{c}\right)^+$ per $0 < c \leq 1$.

**1.13 –** 1) $0^+$; 2) $0^+$; 3) $+\infty$; 4) $+\infty$;

5) $0^+$; 6) $1^+$; 7) $1^+$; 8) $1^+$.

**1.14 –** 1) 3; 2) $0^+$; 3) $-\infty$; 4) $0^+$; 5) $0^+$; 6) $+\infty$;

7) $a_n = (1 - \dfrac{1}{n+3})^{n+3} \cdot (1 - \dfrac{1}{n+3})^{-3} \cdot \dfrac{1}{n} \to 0^+$; 8) $\ln 3$;

9) $a_n = n^2\left\{\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^{1/3}-1\right\} \to -\frac{2}{3}$;

10) $\ln x$; 11) $a_n \to e\cdot 1\cdot \frac{e}{e^{-1}} = e^3$.

**1.15 –** a) $a_n \sim a_n$ ovvio;

$a_n \sim b_n$, cioè $\frac{a_n}{b_n} \to 1 \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \to 1$ cioè $b_n \sim a_n$; $a_n \sim b_n$,

$b_n \sim c_n \Rightarrow \frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{b_n}{c_n} \to 1$ cioè $a_n \sim c_n$.

b) $a_n \asymp a_n$ ovvio; $0 < H \le \frac{b_n}{a_n} \le k \Rightarrow 0 < \frac{1}{k} \le \frac{a_n}{b_n} \le \frac{1}{H}$;

$0 < H \le \frac{b_n}{a_n} \le K$ , $0 < L \le \frac{c_n}{b_n} \le S \Rightarrow 0 < HL \le \frac{c_n}{a_n} = KS$.

c) $b_n \sim a_n \Rightarrow b_n \asymp |a_n|$ , $b_n = O(|a_n|)$ , $a_n = O(|b_n|)$.

$b_n = o(a_n) \Longrightarrow b_n = O(a_n)$.

$b_n \asymp a_n \Longrightarrow b_n = O(a_n)$ , $a_n = O(|b_n|)$.

**1.16 –** 1) $a_n = \frac{1}{n}$ , $b_n = \frac{1}{n^2}$.

2) $a_n = n$ , $b_n = n + \sqrt{n}$.

Se $|a_n| > H > 0$ definitivamente, $\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_n - a_n}{a_n} + 1 \to 1$ se $b_n - a_n \to 0$.

Se $|a_n| < k$ , $a_n - b_n = a_n\left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right) \to 0$ se $b_n \sim a_n$.

Se $0 < H < |a_n| < K$ , $a_n - b_n \to 0$ se e solo se $b_n \sim a_n$.

**1.17 –** 1) $o, O$; 2) $o, O$; 3) $\asymp, O$ ; 4) $o, O$; 5) $\asymp$ , $O$;

6) $o, O$ per ogni $\varepsilon > 0, k > 0$ ; 7) $\sim$ , $\asymp$ , $O$ ; 8) $o, O$ ;

9) $k$ dispari: $o, O$; $k$ pari: nessuna ; 10) $o$ , $0$ ;

11) $d > 0 : o, O$; $d \le 0$ : nessuna ;

12) $1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n+1} \sim \ln(2n+1) - \ln\sqrt{n}; \sim, \asymp, O$ ;

13) $\asymp, O$.



**1.18 –** 
$$\frac{\ln b_n}{\ln a_n} = \frac{\frac{1}{n^2} + \ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{2}\ln + n\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)} \sim \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{2}\ln n} =$$
$$= -2n^{-1}\ln^{-1} n,$$
quindi $a = -2$ , $b = -1$ , $c = -1$.

**1.19 –** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $a_n = \frac{n^2 - n(n+1)}{\sqrt{n^2+1}} \to -1$;

3) $2$ ; 4) $a_n = \frac{n^3\left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}} + n\sqrt{2}} \sim \frac{n^5\cdot\frac{1}{2n^4}}{2\sqrt{2n}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$;

5) 
$$a_n = ne^{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{\ln n}{n}} - (n + a\ln n)$$
$$= ne^{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\ln n}{n}} - (n + a\ln n) =$$
$$= n\left(1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right) - (n + a\ln n) =$$
$$1 + (1-a)\ln n + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right),$$
quindi $a_n \to 1$ per $a = 1$, $a_n \to -\infty$ per $a > 1$, $a_n \to +\infty$ per $a < 1$.

**1.20 –** 1) $\frac{2n+1}{n} \to 2, \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n}} \to 2$ da cui segue la 1).

2) $0 < \frac{n!}{e^{n^2+n}} + \ldots + \frac{n!}{e^{n^2+2n}} < \frac{n!2n}{e^{n^2+n}}$ , $\frac{n!2n}{e^{n^2+n}} \to 0$ (criterio del rapporto) da cui segue la 2).

**1.21 –** 1) $\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\ldots\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \to 0$.

2) $\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right) = n + 1 \to +\infty$.

3) $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$.

**1.22** – Se $\theta_n \neq 0$ definitivamente, $\left\{\left(1+\dfrac{\theta_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{\theta_n}}\right\}^{\theta_n} \to e^{\theta}$ per $n \to +\infty$.

Se $\theta_n$ non è definitivamente diverso da 0,

$$\theta_n \to 0 \quad \text{e} \quad \left(1+\frac{\theta_n}{a_n}^{a_n}\right) \to 1,$$

infatti quando $\theta = 0$ è

$$\left(1+\frac{\theta_n}{a_n}^{a_n}\right) \to 1,$$

e per $\theta_n \neq 0$ vale il calcolo precedente.

**1.23** – $\dfrac{1}{\varepsilon_n}\log_{a_n}(1+\varepsilon_n) = \dfrac{1}{\varepsilon_n}\ln(1+\varepsilon_n)\cdot\dfrac{1}{\ln a_n} \to \dfrac{1}{\ln a}$.

**1.24** – Se $a_n \neq 1$ definitivamente

$$\frac{a_n^{\sigma_n}-1}{\sigma_n} = \frac{e^{\sigma_n \ln a_n}-1}{\sigma_n \ln a_n}\cdot \ln a_n \to \ln a \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

Se $a_n$ non è definitamente diverso da 1, $a_n \to 1$ e $\dfrac{a_n^{\sigma_n}-1}{\sigma_n} \to 0$, infatti quando $a_n = 1$ è $\dfrac{a_n^{\sigma_n}-1}{\sigma_n} = 0$ e per $a_n \neq 1$ vale il calcolo precedente.

**1.25** – Se $a_n \neq 0$ definitivamente

$$\frac{(1+\delta_n)^{a_n}-1}{\delta_n} = \frac{e^{a_n \ln(1+\delta_n)}-1}{\delta_n} \sim a_n \cdot \frac{\ln(1+\delta_n)}{\delta_n} \sim a_n \to a \text{ per } n \to +\infty.$$

Se $a_n$ non è definitivamente diverso da 0, $a_n \to 0$ e

$\dfrac{(1+\delta_n)^{a_n}-1}{\delta_n} \to 0$, infatti quando $a_n = 0$ è $\dfrac{(1+\delta_n)^{a_n}-1}{\delta_n} = 0$, e per $a_n \neq 0$ vale il calcolo precedente.

**1.26** – Essendo la funzione seno pari, supporremo $\varepsilon_n > 0$.



Per I.5.11 è $\cos\varepsilon_n < \dfrac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} < 1$, passando al limite e ricordando III.1.3 si ha

$$\frac{\sin\varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1. \quad \frac{\cos\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\varepsilon_n}{2}}{\frac{\varepsilon_n}{2}}\right)^2 \to -\frac{1}{2}.$$

**1.27** – 1) $n^2\log\left(\cos\frac{1}{n}\right) = n^2\log\left(1+\cos\frac{1}{n}-1\right)$.

$$\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\cos\frac{1}{n}-1} \to -\frac{1}{2}.$$

2) $n\left(e^{\tan\frac{1}{n}}-1\right) = n\left(\dfrac{e^{\tan\frac{1}{n}}-1}{\tan\frac{1}{n}}\right)\cdot\tan\dfrac{1}{n} \to 1.$

3) $$a_n = \left(1-2\sin^2\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2n}}2n\sin^2\frac{1}{2n}} \cdot\left(1-\tan\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}n\tan\frac{1}{n}} \to 1\cdot e^{-1} = e^{-1}.$$

**1.28** – 1) Infinitesimo di ordine 1;

2) non confrontabile;

3) non confrontabile;

4) Ch $\dfrac{1}{n^2} - 1 \sim \dfrac{1}{2n^4}$, infinitesimo di ordine 4;

5) $b_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}+\ln n}$, infinitesimo di ordine $\dfrac{1}{2}$;

6) infinitesimo di oridne $\dfrac{1}{3}$;

7) $b_n = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1 + 1 - \cos n^{-1/3} \sim \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{n^2}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt[3]{n^2}}$ infinitesimo di ordine 2/3;

8) $b_n = \ln(\sqrt[3]{n}+\ln n) - \dfrac{1}{3}\ln(n+\ln n) \sim \dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n}} - \dfrac{\ln n}{3n}$, non confrontabile.

**1.29** – 1) Infinito di ordine 3;
2) non confrontabile;
3) non confrontabile;
4) infinito di ordine $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
5) infinito di ordine $\pi$;
6) $\frac{n^n}{n!} \sim \frac{1}{e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$, non confrontabile;
7) non confrontabile;
8) infinito di ordine $\frac{1}{2}$.

**1.30** – 1) $\left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$;
2) $\left|\frac{(1+i)^n}{n}\right| = \frac{2^{n/2}}{n} \to \infty$;  3) $1-i$;
4) $\left|n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right| = \frac{n}{2^{n/2}} \to 0$;
5) $\left|\frac{z^n}{n!}\right| \to 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

**1.31** – $\frac{|\omega_n|}{|z_n|} = \frac{|o(x_n)|}{|z_n|} \leq \frac{|o(x_n)|}{|x_n|}$,

$\frac{|\omega_n|}{|z_n|} = \frac{|o(y_n)|}{|z_n|} \leq \frac{|\omega(y_n)|}{|y_n|}$,

da cui l'asserto.

**1.32** – Sia $A_h = \left\{a_i \in \{a_n\} : a_i < \frac{a_1}{2^h}\right\}$, ogni $A_h \neq \emptyset$ poichè $a_1 > 0$ e $\lim_{n\to+\infty} \inf a_n = 0$ , $A_h \subseteq A_{h+1}$.

Sia $n_h = \min_{a_i \in A_h} i$ , poichè $\frac{a_1}{2^h} \to 0$ per $h \to +\infty$, ogni indice $n_h$ non può essere ripetuto infinite volte, quindi vi sono infiniti indici $n_h$ distinti per cui $a_{n_h} < a_k$ per $k = 1, 2, \dots n_h - 1$.

**1.33** – 1) $0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$,  2) $0, \pm\sqrt{3}$.

3) la classe limite è $[0,1]$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n}(\varepsilon)$ tale che per $n \geq \overline{n}$ è $\ln(n+1) - \ln n < \varepsilon$; posto



$n_h = \min\{n : \ln n > h, h \in \mathbb{N}\}$ , $n_h \to +\infty$ per $h \to +\infty$, allora, per ogni $n_h > \overline{n}$ ed ogni $a \in [0,1]$, esiste $K \in \mathbb{N}$ , $n_h \leq K \leq n_{h+1}$ tale che $a - \varepsilon \leq \ln K - [\ln K] \leq a + \varepsilon$.

4) la classe limite è $[0,1]$.

5) $a_n = 1 + \sin^2\left(\frac{n\pi}{3}\right) \cdot \left(\cos^2 \frac{1}{n} - 1\right) +$

$$+ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\sin\frac{2}{n} + \sin^2\frac{1}{n}\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right) \to 1.$$

6) la classe limite è $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$;

7) $+\infty$ ;  8) $0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}$.

**1.34** –

1) Per $m$ pari $a_n^{(m)} = 0$; poichè $\frac{n^5\left(\sin\frac{1}{n}\right)^m}{n^2+1} \sim n^{3-m}$, per $m = 1$ la classe limite è $\pm\infty, 0$, per $m = 3$ è $\pm 1, 0$, per $m > 3$ dispari $a_n^{(m)} \to 0$.

2) $a_n^{(m)} \sim (\cos \pi n)^m \cdot n^{m-1}$, per $m = 0$ , $a_n^{(0)} \to 0$, per m=1 la classe limite è $\pm 1$ ,per $m > 1$ dispari è $\pm\infty$, per $m > 0$ pari $a_n^{(m)} \to +\infty$.

**1.35** – 1) $\pm 1$ , $\pm i$ .

2) I valori distinti assunti ciclicamente sono le radici $2k$–esime dell'unità e quindi anche la classe è costituita da tali radici.

3) Sia $r = \frac{p}{q}$ con $p$ e $q$ primi tra loro. Se $p$ è dispari $\exp\frac{i\,p\pi}{q}$ è una radice 2q–esima primitiva dell'unità, se $p$ è pari $\exp\frac{i\,p\pi}{q}$ è una radice q–esima primitiva dell'unità. Ne due casi quindi la classe limite è rispettivamente l'insieme delle radici $2q$–esime e $q$–esime dell'unità.

**1.36** – Posto  $z_n = x_n + iy_n$,  è:

$$\begin{aligned} \exp z_n - 1 &= e^{x_n}\cos y_n - 1 + ie^{x_n}\sin y_n = \\ &= (1 + x_n + o(x_n))(1 + o(y_n)) + \\ &- 1 + i(1 + x_n + o(x_n))(y_n + o(y_n)) = \\ &= (x_n + iy_n) + o(x_n) + io(y_n) + io(x_n) + o(y_n); \end{aligned}$$

dividendo per $z_n$ e usando III.1.31, si ha l'asserto.

**1.37** – 1) $\dfrac{\sin z_n}{z_n} = \dfrac{\exp iz_n - \exp(-iz_n)}{2iz_n} =$

$$= \frac{\exp iz_n - 1}{2iz_n} + \frac{\exp(-iz_n) - 1}{-2iz_n} \to$$
$$\to \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \text{ per III.1.35.}$$

2) $\dfrac{\cos z_n - 1}{z_n^2} = -\dfrac{1}{2}\Bigg(\dfrac{\sin \frac{z_n}{2}}{\frac{z_n}{2}}\Bigg)^2 \to -\dfrac{1}{2}$, per la 1).

3) e 4) seguono dalla 1) e 2) e da II.2.7 3).

## § 2 – Successioni ricorrenti

**2.1** – $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4} + 1 = \dfrac{a_{n-1}}{4^2} + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{A}{4^n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} =$

$$= \frac{A}{4^n} + \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{3/4} \to \frac{4}{3}.$$

**2.2** – Da $a_k - a_{k-1} = \dfrac{1}{2}(a_{k-1} - a_{k-2})$ e da $a_1 - a_0 = \dfrac{1}{2}$, si ha che

$$a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} = \frac{1 - 1/2^{k+1}}{1/2} \to 2.$$

**2.3** – Risultando $a_n > 0$ per ogni $n$, è $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n} < a_n$; la successione è quindi convergente perchè monotona decrescente e limitata inferiormente.
Detto $L$ il suo limite deve essere soddisfatta la relazione

$L = \dfrac{L}{1 + L}$, da cui $L = 0$.

**2.4** – È $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n$, quindi, per I.5.11, è $a_{n+1} = \sin a_n \leq a_n$.
La successione è quindi convergente perchè monotona non crescente e limitata inferiormente.
Detto $L$ il suo limite, per III.1.4 è $L = \sin L$, da cui $L = 0$.



**2.5** – Per induzione si dimostra che

$$a_n < 2,\ n = 1, 2, 3 \ldots; \quad a_{n+1} > \sqrt{2a_n} > a_n$$

poichè $a_n < 2$, quindi $\{a_n\}$ è convergente ad $L$.
Da $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, passando al limite, si ottiene $L = \sqrt{2 + L}$, cioè $L = 2$.

**2.6** – $\sqrt{2} < a_n < 2$ per induzione, $\{a_n\}$ è crescente, poichè $a_2 > a_1$ e se $a_n > a_{n-1}$ è $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}} > \sqrt{2 + \sqrt{a_n}} = a_n$.

**2.7** – 1) $\{u_n\}$ è monotona non decrescente e $a_n \leq v_0$ per $n = 0, 1, 2 \ldots$; $\{v_n\}$ è monotona non decrescente e $v_n \geq u_0$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$, quindi le due successioni convergono e $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
Se $u_n - v_n \to 0$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
2) $u_n \leq v_n$ (vedi I.5.4.), $\quad u_{n+1} \geq \sqrt{u_n \cdot u_n} = u_n$,
$v_{n+1} \leq \dfrac{v_n + v_n}{2} = v_n$, quindi $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ sono convergenti.
$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$, per ricorrenza su $n$ è $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{v_0 - u_0}{2^n}$, quindi $v_n - u_n \to 0$ e
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

**2.8** – $\dfrac{nu_n^2}{(n-1)u_{n-1}^2} = \dfrac{n}{n-1} \cdot \dfrac{(2n-1)^2}{4n^2} = \dfrac{4n^2 - 4n + 1}{4n^2 - 4n} > 1$,

$nu_n^2$ è crescente;

$$\frac{(n + \frac{1}{2})u_n^2}{(n - 1 + \frac{1}{2})u_{n-1}^2} = \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)^2}{4n^2} = \frac{4n^2 - 1}{4n^2} < 1,$$

$(n + \frac{1}{2})u_n^2$ è decrescente,
poichè $(n + \frac{1}{2})u_n^2 > nu_n^2$ le due successioni convergono, allora $u_n^2 \to 0$ e $(n + \frac{1}{2})u_n^2 - nu_n^2 = \frac{1}{2}u_n^2 \to 0$, quindi le due successioni hanno lo stesso limite.
Si può vedere, usando la formula di Stirling, che $nu_n^2 \to \dfrac{1}{\pi}$ per $n \to +\infty$.

**2.9 –** $\{v_n\}$ è monotona crescente e, per induzione, si dimostra che $v_n \le 0$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$. Allora $v_n \to L$ per $n \to +\infty$ ed è $L = L + L^2$, cioè $L = 0$.

**2.10 –** Per induzione è

$$a_{2m+1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^m} \quad \text{e} \quad a_{2m} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right),$$

quindi $\lim_{n\to+\infty} \sup a_n = \lim_{m\to+\infty} a_{2m+1} = 1$

e $\lim_{n\to+\infty} \inf a_n = \lim_{m\to+\infty} a_{2m} = \frac{1}{2}$.

∘ **2.11 –** $a_{n+1} - a_n = 2^n(2x_{n+1} - x_n - 1) = -2^n(x_{n+1} - 1)^2 \le 0$, $\{a_n\}$ decrescente;

$b_{n+1} - b_n = 2^n x_{n+1}^{-2}(x_{n+1} - 1)^2 \ge 0$, $\{b_n\}$ crescente;

$\frac{a_n}{b_n} = x_n \to 1$ per $n \to +\infty$, cioè $a_n \sim b_n$.

Per $x \ge 1$ è $a_n \ge 0$ quindi ammette limite e

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \Phi(x).$$

Per $0 < x < 1$ è $b_n \le 0$ quindi ammette limite e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \Phi(x).$$

a) $\Phi(1) = 0$, ovvio;

b) $2^n(x_n y_n - 1) = 2^n(x_n y_n - y_n + y_n - 1) =$
$= y_n 2^n(x_n - 1) + 2^n(y_n - 1)$,

$2^n(x_n y_n - 1) \to \Phi(xy)$ ,
$y_n 2^n(x_n - 1) + 2^n(y_n - 1) \to \Phi(x) + \Phi(y)$;

c) $2^n(x_n - 1) - 2^n(y_n - 1) = 2^n(x_n - y_n) \ge 0$ per $x \ge y$ da cui l'asserto.

Poichè $a_n = 2^n(x^{1/2^n} - 1)$, è $a_n \to \ln x$ (vedi III.1.21).

∘ **2.12 –** $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\frac{1}{1 + \sqrt{1 + x_n^2}} < 1$, quindi per $x > 0$, $\{a_n\}$ è decrescente e $a_n > 0$, per $x < 0$ è $\{a_n\}$ crescente e $a_n < 0$.

Allora $\{a_n\}$ ammette limite e $\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{1 + x_n^2}} \to 1$ poichè



$x_n \to 0$ essendo $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{2}$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \Phi(x).$$

## § 3 – Complementi sui limiti di successioni

**3.1 –** Sia $a_1 \in E$ qualsiasi e $a_{n+1} \in E$ e $\frac{s + a_n}{2} < a_{n+1} < s$, la successione $\{a_n\}$ è monotona e $a_n \to s$ per $n \to +\infty$.

**3.2 –** $\sqrt{s_{n+1}} - \sqrt{s_n} = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{s_{n+1}} + \sqrt{s_n}} = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{s_n}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a_{n+1}}{s_n}}\right)} \sim \frac{a_{n+1}}{2\sqrt{s_n}}$.

**3.3 –** $2a_n \to \nu_1$ , $a_n \to \frac{\nu_1}{2}$, quindi $a_n + a_{n+1} \to \nu_1 = \nu$.

**3.4 –** Posto

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sup a_n \ , \quad B = \lim_{n\to+\infty} \sup b_n \ ,$$

$$C = \lim_{n\to+\infty} \sup(a_n + b_n)$$

per ogni $\varepsilon > 0$ è definitivamente $a_n < A + \varepsilon/2$ e $b_n < B + \varepsilon/2$, quindi $a_n + b_n < A + B + \varepsilon$ e per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ è $C \le A + B$.

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \quad , \quad b_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}.$$

**3.5 –** Posto $A = \lim_{n\to+\infty} \sup a_n$, per ogni $\varepsilon > 0$ è $\sup_{n>k} a_n > A - \varepsilon$ poichè esistono infiniti indici $n$ con $a_n > A - \varepsilon$, allora

$\inf_k(\sup_{n>k} a_n) > A - \varepsilon$ e per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, è

$\inf_k(\sup_{n>k} a_n) \ge A$.

Poichè definitivamente $a_n < A + \varepsilon$ è $\inf_k(\sup_{n>k} a_n) < A + \varepsilon$

quindi $\inf_k(\sup_{n>k} a_n) \le A$.

In modo analogo si procede per $\lim_{n\to+\infty} \inf a_n$.

**3.6 –** $a^{b_n - B_n} \to 1$ se e solo se $b_n - B_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

**3.7 –** $\dfrac{a_n^{b_n}}{a^{B_n}} = (\dfrac{a_n}{a})^{B_n} \cdot a_n^{b_n - B_n}$ , $a_n^{b_n - B_n} \to 1$ poichè $b_n - B_n = o(1)$;
$\ln(\dfrac{a_n}{a})^{B_n} = B_n \ln(1 + \dfrac{a_n - a}{a}) \sim \dfrac{1}{a} \cdot B_n(a_n - a) \to 0$ se e solo se
$B_n(a_n - a) \to 0$ per $n \to +\infty$.

∘∘ **3.8 –** Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n}(\varepsilon)$ tale che per $n \geq \overline{n}$ è $|a_n - a| < \varepsilon$;
sia $n \geq \overline{n}$, $0 \leq |t_n - a| \leq \dfrac{|a_1 - a|}{n} + \dfrac{|a_2 - a|}{n} +$

$$\ldots + \frac{|a_{\overline{n}} - a|}{n} + \frac{|a_{\overline{n}+1} - a|}{n} +$$

$$\ldots + \frac{|a_n - a|}{n} \leq \frac{|a_1 - a|}{n} + \ldots + \frac{|a_{\overline{n}} - a|}{n} + \frac{n - \overline{n}}{n}\varepsilon < 2\varepsilon$$

per $n$ abbastanza grande.
Per l'arbitrarietà di $\varepsilon, t_n \to a$ per $n \to +\infty$.

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \text{ irregolare}, \quad t_n \to \frac{1}{2}.$$

Caso particolare di III.3.17.

**3.9 –** $\ln q_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln a_k \to \ln a$, da cui $q_n \to a$ per $n \to +\infty$.
$a_n = 2 + (-1)^n$ irregolare , $q_n \to \sqrt{3}$.

∘∘ **3.10 –** Se $a_n \to \pm\infty$, l'affermazione è ovvia.
Sia $|a| < +\infty$.
Per ogni $1 > \varepsilon > 0$ esistono: $n_1 = n_1(\varepsilon)$ tale che per $n \geq n_1$ è

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

$n_2 = n_2(\varepsilon) > n_1$ tale che per $n \geq n_2$ è

$$\sum_{k=1}^{n_2 - n_1 - 1} \frac{1}{2^k} > 1 - \varepsilon \qquad \text{(vedi I.2.5)},$$



$n_3 = n_3(\varepsilon)$ tale che per $n \geq n_3$ è

$$|B_n| = |\frac{1}{2^n}a_1 + \ldots + \frac{1}{2^{n-n_1}}a_{n_1+1}| < \varepsilon.$$

$|\sigma_n - a| \leq |B_n| + |A_n - a|$,

$$|A_n - a| = |A_n - \sum_{k=1}^{n-n_1-1} \frac{1}{2^k}a - (1 - \sum_{k=1}^{n-n_1-1} \frac{1}{2^k})a| \leq \varepsilon|a| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-n_1-1} \frac{1}{2^k}|a_{n-k+1} - a| < \varepsilon(|a| + 1) \quad \text{per} \quad n \geq n_2.$$

Quindi per $n \geq \max(n_2, n_3)$ è $|\sigma_n - a| \leq \varepsilon(|a| + 2)$, da cui l'asserto.

∘ **3.11 –** $p_0 \cdot p_1 \ldots p_{n-1} = \dfrac{n^n}{n!}$, poichè $p_n \to e$ anche

$$\sqrt[n]{p_0 \cdot p_1 \ldots p_{n-1}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \to e.$$

∘ **3.12 –** Per III.3.11 è $\sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n}} = e(1 + o(1))$ per $n \to +\infty$; da questa si ricava $n! = n^n e^{-n}(1 + o(1))^{-n}$ e quindi, passando ai logaritmi, per III.1.23, segue l'asserto.

**3.13 –** Posto $p_i = (1 + \frac{1}{i})^i$ è $p_i < e$, segue che

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{p_1 \ldots p_{n-1} p_n} < e.$$

**3.14 –** $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dfrac{a_2}{a_1} \cdots \dfrac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{a_n} \to 1$ per il risultato di III.3.9.
$a_n = 2^n(\dfrac{1}{2} + (-1)^n\dfrac{1}{3})$ , $\sqrt[n]{a_n} \to 2$ e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ è irregolare.
Si può dimostrare più in generale che
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to+\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} \leq$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

○○ **3.15** – Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\exp(i\alpha)$ è valore limite di $\{\exp(i\, n)\}$.

Fissato $\varepsilon > 0$ esistono $n_1, n_2$, tali che

$0 < |\exp(in_1) - \exp(in_2)| < \varepsilon$ (vedi I.4.12),

posto $\overline{n} = n_1 - n_2$ è

$0 < |\exp(i\overline{n}) - 1| < \varepsilon$ e quindi

$0 < |\exp(ih\overline{n}) - \exp\{i(h-1)\overline{n}\}| < \varepsilon$ , $h \in \mathbb{N}$.

Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$0 < |\exp(ik\overline{n}) - \exp(i\beta)| < \varepsilon$,

da cui segue, per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, che $\exp(i\beta)$ è valore limite di $\{\exp(in)\}$.

Se ne deduce che la classe limite di $\{\sin n\}$ e di $\{\cos n\}$ è l'intervallo $-1 \le x \le 1$.

○○ **3.16** – Se $t_n \to t$ la proposizione è vera.

Sia $l < \alpha < L$, per ogni $\delta > 0$ esiste $\overline{n} = \overline{n}(\delta)$ tale che per $n \ge \overline{n}$ è $0 \le \varepsilon_n < \delta$ ed esistono infiniti indici $n$ per cui $|t_n - L| < \delta$ e infiniti indici $n$ per cui $|t_n - l| < \delta$.

Sia $n_\circ > \overline{n}$ e $|t_{n_\circ} - L| < \delta$, sia $n_1 > n_\circ$ e $|t_{n_1} - l| < \delta$, allora esiste $\tilde{n}$ con $n_\circ \le \tilde{n} \le n_1$ per cui $|t_{\tilde{n}} - \alpha| < \delta$, poichè $t_{n_\circ+h} - t_{n_\circ+h+1} < \varepsilon_{n_\circ+h} < \delta$; per l'abritrarietà di $\delta$, $\alpha$ è un valore limite di $\{t_n\}$.

Se $l$ o $L$ o entrambi sono infiniti, la dimostrazione è valida con le ovvie modifiche.

○ **3.17** – Posto $s_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} = \overline{n}(\varepsilon)$ tale che per



$n \ge \overline{n}$ è $|s_n - s| < \varepsilon$; sia $n > \overline{n}$, allora si ha

$$0 \le \left|\frac{a_0 + a_1 + \dots a_n}{b_0 + b_1 + \dots + b_n} - s\right| =$$

$$= \left|\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\overline{n}}(a_k - sb_k) + \sum_{k=\overline{n}+1}^{n}(a_k - s\,b_k)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k}\right| \le$$

$$\le \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\overline{n}}|a_k - sb_k|}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k} + \frac{\displaystyle\sum_{k=\overline{n}+1}^{n} b_k\,|s_k - s|}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k} \le$$

$$\le \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\overline{n}}|a_k - sb_k|}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

per $n > n_1$ abbastanza grande, poichè $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k \to +\infty$ per $n \to +\infty$.

○○ **3.18** – Per III.3.17 basta dimostrare che $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$.

$$\frac{\dfrac{p_n}{P_n}}{\ln\dfrac{P_n}{P_{n-1}}} = \frac{\dfrac{p_n}{P_n}}{\ln(1 + \dfrac{p_n}{P_{n+1}})} \sim \frac{P_{n-1}}{P_n} = 1 - \frac{p_n}{P_n} \to 1$$

per $n \to +\infty$.

Capitolo IV

# SERIE NUMERICHE

## § 1 – Determinazione del carattere di serie numeriche

**1.1 –** $s_n = (a_\circ - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) = a_\circ - a_{n+1}$ da cui l'asserto.

**1.2 –** 1) $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$,

posto $a_n = \dfrac{1}{n}$ applicando IV.**1**.**1** si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$ e per IV.1.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

3) $s_n = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1) + (\sqrt{12} - \sqrt{6} - 1) + \ldots$

$$\ldots + \left(\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n(n-1)} - 1\right) =$$

$$= \sqrt{n(n+1)} - n \to \frac{1}{2} \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

**1.3 –** Sia $n > 2m$, $s_n = \dfrac{1}{2m} \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n} \left(\frac{1}{m+k} - \frac{1}{k-m}\right) =$

$$= \frac{1}{2m}\left\{\sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2m} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-m} \frac{1}{k}\right\} =$$

$$\frac{1}{2m}\left(\sum_{k=n-m+1}^{n+m}\frac{1}{k}-\frac{3}{2m}\right)\to$$

$$\to -\frac{3}{4m^2} \text{ per } n\to+\infty \text{ poichè } \sum_{k=n-m+1}^{n+m}\frac{1}{k}\to 0 \text{ per } n\to+\infty.$$

**1.4** – $s_n = \arctan 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\frac{1}{k}-\arctan\frac{1}{k+1}\right)\to$

$\to 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ per $n\to+\infty$.

**1.5** – $\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)\to -\ln 2$ per $n\to+\infty$.

**1.6** – $a_n = s_n - s_{n-1} = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ per $n\neq 1$,

$a_1 = s_1 = -\ln 2$.

**1.7** – $\sum_{k=0}^{n} aq^k = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ per $q\neq 1$,

quindi la serie geometrica converge per $|q|<1$ e

$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$; per $|q|\geq 1$ la serie non converge.

**1.8** – $0\leq \sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$, quindi

$$0<\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{\pi}{2^k}<\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi}{2^k} = \pi\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

e passando al limite per $n\to+\infty$ segue l'asserto.

**1.9** – Per III.1.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ è divergente e poichè $\frac{1}{n^s}>\frac{1}{n}$ per ogni $s<1$, anche $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ è divergente per $s<1$.



Poiché

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n+1)} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

converge (IV.1.2), $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, essendo inoltre $\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n^s}$, anche $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ per $s>2$ converge.

**1.10** – $\frac{1}{n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}>\frac{1}{nS}$ ove $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, quindi la serie data diverge.

**1.11** – 1) $u_n>1$ per ogni $n$, la serie quindi diverge.

2) $u_n\sim\frac{1}{n^2}$, converge.

3) $u_n\sim\frac{1}{n}$, diverge.

4) $u_n\to 1$ per $n\to+\infty$, diverge.

5) $u_n\sim\frac{1}{n}$, diverge.

6) $u_n\sim\frac{1}{n^2}$, converge.

7) $u_n = e^{-\sqrt{n}}<\frac{1}{n^2}$ definitivamente, converge.

8) $u_n\to+\infty$ per $n\to+\infty$, diverge.

9) per $x\leq 0, u_n\geq 1$, diverge; per $x>0, u_n<\frac{1}{n^2}$ definitivamente, converge.

10) $u_n\sim\frac{1}{4n}$, diverge.

11) $u_n<\frac{1}{n^2}$ definitivamente, converge.

12) $u_n\sim\frac{2}{\sqrt{n}}$, diverge.

∘ **1.12** – $0 < b_n < 2^{n-1} \cdot \dfrac{1}{(2^{n-1})^s}$, cioè $0 < b_n < \left(\dfrac{1}{2^{s-1}}\right)^{n-1}$, per $s > 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^{s-1}}\right)^n$ converge (IV.1.7), quindi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Poichè $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è ottenuta raggruppando i termini dello stesso segno di $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{s^n}$, anche quest'ultima converge.

(Si indica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s} = \zeta(s)$, funzione di Riemann).

**1.13** – Poichè $a_0 > 0$, tutti i termini sono positivi; poichè $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2 + a_n} < \dfrac{1}{2}$, per il criterio del rapporto la serie converge.

**1.14** – Poichè $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, si ha definitivamente $a_n^s \le a_n$, da cui l'asserto.

**1.15** – La risposta è negativa, come mostra il seguente esempio:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

∘ **1.16** – Per $p > 1$ è $\dfrac{1}{n^p \ln^q n} > \dfrac{1}{n^{1+\frac{p-1}{2}}}$ definitivamente, converge quindi per ogni $q$.

Per $p < 1$ è $\dfrac{1}{n^p \ln^q n} > \dfrac{1}{n^{1-\frac{1-p}{2}}}$ definitivamente, diverge per ogni $q$.

Per $p = 1$ è $2^{n-1} \cdot \dfrac{1}{2^n \ln^q 2n} < b^n < 2^{n-1} \cdot \dfrac{1}{2^{n-1} \ln^q 2^{n-1}}$,

cioè $\dfrac{1}{2n^q \ln^q 2} < b_n < \dfrac{1}{(n+1)^q \log^q 2}$,

quindi $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ ed anche la serie data convergono per $q > 1$ e divergono per $q \le 1$.



∘∘ **1.17** – $k^{n-1} a_{k^n} \le b_n \le k^{n-1} a_{k^{n-1}}$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} k^n a_{k^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hanno lo stesso carattere.

**1.18** – 1) $u_n \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$, converge;

2) $u_n < \dfrac{1}{n \ln^{3/2} n}$ definitivamente, converge;

3) $u_n \sim \dfrac{1}{n \ln n}$, diverge

4) $u_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n} \ln^3 n}$, diverge.

**1.19** – 1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^k \cdot \dfrac{1}{n+1} \to +\infty$, converge;

2) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2(2n+1)} \to \dfrac{1}{4}$ per $n \to +\infty$, converge;

3) $u_n < 2^{-\sqrt[3]{n}} < \dfrac{1}{n^2}$ definitivamente, converge;

4) $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{\ln \ln n}{\ln n} \to 0$ per $n \to \infty$, converge;

5) Per III.3.13 è $e^n > \dfrac{n^n}{n!}$, quindi $u_n > 1$, diverge;

6) $\sqrt[n]{u_n} = \arcsin \dfrac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, converge.

**1.20** – 1) $u_n = \sqrt{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{2n^2 + 2}\right) \sim \dfrac{1}{2n^{3/2}}$, converge;

2) $u_n = \left(1 - e^{1/2n}\right)^2 \sim \dfrac{1}{4n^2}$ converge;

3) $u_n \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$, converge;

4) $u_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n+3}\right)^{n+3} \left(1 - \dfrac{1}{n+3}\right)^{-3} \sim \dfrac{e^{-1}}{n}$, diverge;

5) $u_n = \dfrac{1}{n \sqrt[n]{n}} \sim \dfrac{1}{n}$, diverge;

6) $u_n \sim \dfrac{1}{n}$, diverge;

7) $u_n \sim \dfrac{\ln 2}{n} \cdot \dfrac{1}{\ln n}$, diverge;

8) $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} \cdot \dfrac{\left\{\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}\right\}^{n\sin\frac{1}{n}}}{2+\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}} \to \dfrac{1}{2}$

per $n \to +\infty$, converge.

**1.21** – 1) $u_n \to 1$ per $n \to +\infty$, non converge;

2) $u_n \to 0$ per $n \to +\infty$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{\ln n}{n} =$

$= \dfrac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln n}{n(n+1)} < 0$ definitivamente, converge;

3) $u_n \to 0$ per $n \to +\infty, u_n = \dfrac{1}{\ln n + 1} + \dfrac{1}{\ln^2 n - 1}$
monotona non crescente, converge;

4) $0 < u_n < \dfrac{1}{n^2}$, converge assolutamente;

5) converge; 6) converge assolutamente.

∘ **1.22** – 1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{4\,k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1-(-1)^k}{8\,k} \to -\infty$ per

$n \to +\infty$,

poichè la prima somma converge e la seconda diverge.

2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k u_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n+1} \sim$

$\displaystyle\sim \ln\left(2\frac{n+1}{n-2}\right) - 1$ per $n$ pari, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k u_k \sim \ln\left(\frac{2\,n}{n-1}\right) - 1$
per $n$ dispari,

da cui $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n u_n = \ln 2 - 1$.

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n u_n$ è convergente perchè somma di due serie convergenti.

**1.23** – $b_n = \dfrac{1}{3n+(-1)^n n}$ , $a_n = \dfrac{1}{2\,n}$.



∘∘ **1.24** – $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$ , $b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln n} & , n \text{ pari} \\ \dfrac{1}{\ln n} - \dfrac{1}{n} & , n \text{ dispari} \end{cases}$ , $b_n \sim a_n$

e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge

e $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k b_k \ge \sum_{k=2}^{n}(-1)^k a_k + \sum_{k=2}^{[n/2]}\frac{1}{2k-1} \to +\infty$ per $n \to +\infty$

**1.25** – 1) $u_n = \dfrac{\cos n\pi}{\sqrt{n^2+\cos n\pi}+n}$ , $|u_n| \to 0$ per $n \to +\infty$

e $|u_n| \ge |u_n + 1|$

poichè $\sqrt{(n+1)^2+\cos(n+1)\pi} + n + 1 >$
$> \sqrt{n^2+\cos n\pi} + n$, la serie converge.

2) $|\sin(\theta^n)| < |\theta^n|$, quindi essendo $|\theta| < 1$, la serie converge assolutamente.

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ converge ed essendo ottenuta raggruppando i termini dello stesso segno della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{[n/10]}\frac{1}{n}$, anche quest'ultima converge.

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{1}{k}}{k}$,

la serie data converge perchè somma di due convergenti.

5) $|u_n| \le \dfrac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}}{n-1} \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$, converge assolutamente.

**1.26** – 1) Per $|a| < 2$ è $\left|\dfrac{a^n}{a^n+2^n}\right| \sim \left|\dfrac{a}{2}\right|^n$, converge;

per $|a| > 2$ è $\dfrac{a^n}{a^n+2^n} \to 1$ per $n \to +\infty$, diverge;

per $a = 2$ è $\dfrac{a^n}{a^n+2^n} = \dfrac{1}{2}$, diverge.

2) Per $a = 0$ , $\dfrac{n^n - n!}{-e^n} \sim \dfrac{n^n}{-e^n} \to -\infty$, diverge;

per $a \neq 0$ è $\dfrac{n^n - n!}{(an)^n - e^n} \sim \dfrac{1}{a^n}$,

per $|a| \leq 1$ diverge, per $|a| > 1$ converge assolutamente.

3) $\dbinom{n}{k} \dfrac{1}{n(n \ \ln n)^a} \sim \dfrac{1}{k!} \cdot \dfrac{1}{n^{a-k+1} \ln^a n}$ , per $a > k$ converge,

per $a < k$ diverge,

per $a = k$ converge per $k > 1$, diverge per $k = 0, 1$.

4) $$\frac{n(\ln - a) - \ln n!}{n^a \sqrt{n+1}} \sim \frac{n(1-a) - \frac{1}{2}\ln n}{n^{a+1/2}},$$

per $a = 1$ converge, per $a > \dfrac{3}{2}$ converge,

per $a \leq 3/2$, $a \neq 1$, diverge.

**1.27** – 1) Se $a \leq 2$, $\left\{ \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2} \right\}^{n^{a-2}} \sim e^{-n^{a-2}}$, diverge; se $a > 2$ è

$\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^a} = e^{n^a \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = e^{-n^{a-2} + o(n^{a-2})} = e^{-n^{a-2}(1+o(1))} \leq$

$\leq e^{-\frac{1}{2}n^{a-2}}$, converge.

2) Per il criterio della radice converge assolutamente per ogni $a$ e $b$.

3) $(1^a + 2^a + \ldots + n^a) b^{-\ln n} \sim \dfrac{n^{a+1}}{a+1} b^{-\ln n} = \dfrac{1}{a+1} \ \dfrac{1}{n^{\ln b - a - 1}}$,

converge per $b > e^{a+2}$, diverge per $b \leq e^{a+2}$.

∘ **1.28** – 1) $\sqrt{n^2 + a^2} - n \sim \dfrac{a^2}{2n}$ per $n \to +\infty$.

2) Per la 1) si ha definitivamente $0 \leq \left(\sqrt{n^2 + a^2} - n\right)\pi \leq \dfrac{a^2}{n}\pi$,

quindi se $\dfrac{a^2}{n} < 1$ la serie è a segni alternati;

$$\sin\left(\sqrt{n^2 + a^2} \cdot \pi\right) = \sin\left\{ n\pi + \left(\sqrt{n^2 + a^2} - n\right)\pi \right\} \to 0$$

per $n \to +\infty$;



$$\frac{\sqrt{n^2 + a^2} - n}{\sqrt{(n+1)^2 + a^2} - (n+1)} = \frac{\sqrt{(n+1)^2 + a^2} + (n+1)}{\sqrt{n^2 + a^2} + n} > 1,$$

quindi la differenza $\sqrt{n^2 + a^2} \cdot \pi - n\pi$ è monotona decrescente,

allora è monotona anche $\left|\sin\left(\sqrt{n^2 + a^2} \cdot \pi\right)\right|$ e la serie converge.

**1.29** – 1) $\left|\dfrac{n(2+i)^n}{2^n}\right| \to +\infty$, non converge;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{n} + i} = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} - \dfrac{i}{n+1}$, diverge.

3) $\left|\dfrac{1}{(n+i)\sqrt{n}}\right| < \dfrac{1}{n^{3/2}}$, converge assolutamente;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$,
converge perchè somma di due serie convergenti.

5) serie geometrica con ragione di modulo 1, non converge.

**1.30** – Procediamo per induzione: $a_2 = \dfrac{3}{5} < a_0$,

sia $a_n < a_{n-2}$, allora

$$a_{n+2} = \frac{1}{\dfrac{2}{2a_n + 1} + 1} < \frac{1}{\dfrac{2}{2a_{n-2}} + 1} = a_n,$$

questo mostra che $\{a_{2k}\}$ è decrescente. In modo analogo si vede che $\{a_{2k+1}\}$ è crescente.
Poichè $0 < a_n \leq 1$, le due sottosuccessioni sono convergenti ed il loro limite deve soddisfare la relazione $L = \dfrac{1}{\dfrac{2}{2L+1} + 1}$,

cioè $L = \dfrac{1}{2}$.
La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2a_n)$ è a segni alterni e il termine generale tende a zero.

Per la convergenza è sufficiente mostrare la monotonia della successione $\{|1-2a_n|\}$.

$$(1-2a_{2k+1})-(2a_{2k}-1)=2a_{2k}\cdot\frac{1-2a_{2k}}{1+2a_{2k}}<0$$

poiché $a_{2k}>\frac{1}{2}$. In modo analogo si vede che

$$(2a_{2k+2}-1)-(1-2a_{2k+1})<0.$$

## § 2 – Criteri, proprietà e operazioni sulle serie

**2.1** – $0\le|a_{n+1}-a_n|\le|a_{n+1}|+|a_n|$, poichè

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(|a_{n+1}|+|a_n|\right)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_{n+1}|+\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$$

è convergente, segue l'asserto.
Se $a_n=\frac{(-)^n}{n}$; allora $|a_{n+1}-a_n|=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$
e $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$ è divergente.

**2.2** – $\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n}a_k>\frac{n}{2}a_n$, poichè $\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n}a_k\to 0$
per $n\to+\infty$ segue l'asserto.
Sia $a_n=\frac{1}{n\ \ln\ n}$, $na_n\to 0$ per $n\to+\infty, a_n\ge a_{n+1}$,
ma la serie $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ diverge.

**2.3** – $\left|\sum_{k=m}^{n}a_kb_k\right|=\left|\sum_{k=m}^{n-1}(b_k-b_{k+1})A_k+b_nA_n-b_mA_{m-1}\right|\le$
$\le K\cdot|b_n-b_m|+|b_n|\cdot|A_n-A_{m-1}|+|A_{m-1}|\cdot|b_n-b_m|$,



ove $A_k=a_o+a_1+\ldots+a_k$ , $K=\sup_k|A_k|$ ; $|b_n-b_m|\to 0$ per $n,m\to+\infty$ poichè $\{b_n\}$ è convergente,
$|A_n-A_{m-1}|\to 0$ per $n,m\to+\infty$ poichè $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ è convergente,
da cui l'asserto.

**2.4** – $\sum_{k=m}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{k}\le\left(\sum_{k=m}^{n}a_k\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\to 0$
per $m,n\to+\infty$, da cui l'asserto (caso particolare di IV.2.7).

∘ **2.5** – 1) se vi sono infiniti $a_n>1$ , $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ diverge poichè il termine generale non tende a 0; se $a_n>1$ definitivamente, è $\frac{a_n}{1+a_n}\ge\frac{a_n}{2}$ definitivamente e la serie data diverge.
2) $\sum_{k=n}^{n+p}\frac{a_k}{s_k}>\frac{s_{n+p}-s_n}{s_{n+p}}\to 1$ per ogni $n$ e per $p\to+\infty$, la serie diverge per il criterio di Cauchy.
3) $0\le\frac{a_n}{s_n^2}\le\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}\right)$
converge per IV.1.1.
Se $a_n=\frac{1}{n},\frac{a_n}{1+na_n}=\frac{1}{2n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ diverge;

se $a_n=0$ per $n\ne 2^k$ e $a_{2^k}=2^{2k}$ è $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ divergente,

$\frac{a_n}{1+na_n}=0$ per $n\ne 2^k$ e $\frac{2^k}{1+2^ka_{2^k}}<\frac{1}{2^k}$, quindi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$
converge.

**2.6** – $\sum_{k=n}^{n+p}\frac{a_k}{r_k}>\frac{1}{r_n}(r_n-r_{n+p})=1-\frac{r_{n+p}}{r_n}\to 1$

per $p\to\infty$ e per ogni $n$, quindi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{r_n}$ diverge.

$$\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}=\frac{r_{n-1}-r_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}=\frac{a_{n-1}}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}\ge\frac{a_{n-1}}{2\sqrt{r_{n-1}}}$$

e per IV.1.1 segue l'asserto.

**2.7 –** 1) $0 \le \sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k v_k} \le \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)^{1/2} \le (UV)^{1/2}$,
da cui l'asserto.

2) $u_n = v_n = \frac{1}{n}$ tutte e tre le serie divergono;

$$u_{2n} = \frac{1}{2n}\ ,\ u_{2n+1} = 0\ ,\ v_{2n} = 0, v_{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

le prime due serie divergono, mentre la terza è la serie nulla.

**2.8 –**
$$0 \le 2\frac{a_n a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}} \le \sqrt{a_n a_{n+1}}$$
e per IV.2.7 segue l'asserto.

**2.9 –**
$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k^2$$
per I.5.12, passando al limite per $n \to +\infty$ segue l'asserto.

**2.10 –** $B_N + (a-\varepsilon) \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k} \le B_n \le B_N + (a+\varepsilon) \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k}$
da cui
$$B_N + (a-\varepsilon)\ln n - (a-\varepsilon)\ln(N+1) + \sigma_n \le B_n \le$$
$$\le B_N + (a+\varepsilon)\ln n + c(a+\varepsilon) + \delta_n$$
ove $\sigma_n \to 0$, $\delta_n \to 0$ per $n \to +\infty$.
Dividendo per $a \ln n$ e passando al limite per $n \to +\infty$ si ha
$$1 - \frac{\varepsilon}{a} \le \lim_{n\to+\infty} \inf \frac{B_n}{a \ln n} \le \lim_{n\to+\infty} \sup \frac{B_n}{a\ln n} \le 1 + \frac{\varepsilon}{a}$$
e per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ segue l'asserto.

○ **2.11 –** Poichè $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$ la serie è a termini positivi.
$$\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left\{1 - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} <$$
$$< \frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} =$$



$$= \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{2}{n^2},$$
quindi la serie è convergente.
$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k} - \log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to C$$
poichè la serie è convergente, da cui l'asserto (C si dice costante di Eulero–Mascheroni).

○ **2.12 –** Si consideri la serie
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{n\ln n} - \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)\right\}.$$
In modo analogo a IV.2.11 si mostra che tale serie è a termini positivi e convergente.
$$\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{k\ln k} - \ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln k}\right)\right\} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} - \ln\ln(n+1) =$$
$$= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n - \ln\left(1 + \ln\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) \to A < +\infty$$
per $n \to +\infty$, quindi $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n$ ammette limite finito.
$$\sum_{k=n}^{n^p}\frac{1}{k\ln k} = \ln\ln(n^p) + A + \sigma_{n^p} - \ln\ln n - A - \sigma_n$$
ove $\sigma_{n^p}$, $\sigma_n \to 0$
per $n \to +\infty$, da cui segue l'asserto.

○○ **2.13 –**
$$\frac{(k+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1-\alpha} - 1\right\} \le$$

$$\leq \frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{k} = \frac{1}{k^\alpha}$$

per la 2) di I.5.9.

$$(*) \quad \frac{(k+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{(k+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left\{1-\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{1-\alpha}\right\}$$

$$\geq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$$

per la 5) di I.5.9.

Sommando le disuguaglianze ottenute si ha

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$$

da cui

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

da cui si ricava che $\dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$ è limitata;

dalla (*) segue che quest'ultima differenza è monotona e quindi convergente ad un numero $\beta$.

Poichè $\dfrac{\alpha}{1-\alpha} \leq \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}$ segue l'asserto.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ è convergente e

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = \frac{(2n-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \beta - 2^{1-\alpha}\left(\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \beta\right) + \mu_n =$$

$$= \beta(2^{1-\alpha}-1) + \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left\{(n-1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right\} + \mu_n$$

ove $\mu_n \to 0$ per $n \to +\infty$; passando al limite segue l'asserto.

**2.14 –** Posto $A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ , $B_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$ , $C_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_n$ , si ha $0 < A_{[n/2]} \cdot B_{[n/2]} \leq C_n$ da cui, poichè $B_{[n/2]} \to +\infty$ per $n \to +\infty$, segue l'asserto.



**2.15 –** $c_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$; sia $n$ pari, allora:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} > (n+1)\cdot\frac{1}{\frac{n}{2}+1} \to 2$$

per $n \to +\infty$ da cui l'asserto.

**2.16 –** $\dfrac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{|z|^n} = \dfrac{|z|}{n+1} \to 0$ per $n \to +\infty$ per ogni $z$;

quindi la serie data converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$.

$f(0) = 1$ ovvio; $f(z_1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}$, $f(z_2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}$,

il termine $n$-esimo del prodotto secondo Cauchy è

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$$

da cui l'asserto. Si pone $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, tale posizione viene in parte giustificata in IV.2.17.

**∘ 2.17 –** $t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = 1 + x + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \ldots$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)x^n \leq s_n,$$

da cui passando al limite per $n \to +\infty$ si ha $e^x \leq f(x)$.

Se $m < n$ è $t_n \geq 1 + x + \ldots + \dfrac{1}{m!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\dfrac{m-1}{n}\right)x^m$,

passando al limite per $n \to +\infty$ e $m$ fisso si ha $e^x \geq s_m$ e per $m \to +\infty$ è $e^x \geq f(x)$, da cui l'asserto.

**2.18 –** $0 < e - s_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+2)!} + \ldots$

$$+ \ldots < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{1}{n!n}.$$

○○ **2.19** – Sia per assurdo $e = \frac{q}{p}$ con $p$ e $q$ interi positivi;

$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q}$ e $q!e$ e $q!s_q$ sono interi quindi $q!(e - s_q)$ risulta essere un intero compreso fra 0 e 1, assurdo.

**2.20** – 1) Convergente.

2) $$s_{3k} = \sum_{n=0}^{k} \left\{ \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n+3}} - \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} \right\} > \sum_{n=0}^{k} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \right) \to +\infty$$

per $k \to +\infty$ ; $s_{3k-1} > s_{3k}$ e $s_{3k+1} > s_{3k}$, quindi la serie diverge a $+\infty$.

3) $S_{2k} = \sum_{n=2}^{k} \frac{2}{n-1} \to +\infty$ per $k \to +\infty$ , $S_{2k-1} > S_{2k}$, quindi la serie diverge a $+\infty$.

○ **2.21** – $$s_{k(p+q)} = \frac{1}{2}\ln(kp) + \frac{c}{2} - \ln\{2(k-1)q+1\} - c + 1 + \frac{1}{2}\ln\{(k-1)q\} + \frac{c}{2} + \sigma_k \text{ ove } \sigma_k \to 0 \text{ per } k \to +\infty,$$

$s_{k(p+q)} \to \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q} - \ln 2 + 1$ per $k \to +\infty$;

poichè $s_n = s_{\overline{k}(p+q)} + \delta_n$ ove $\overline{k} = \left[\frac{n}{p+q}\right]$ e $\delta_n \to 0$

per $n \to +\infty$, è $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q} - \ln 2 + 1$, da cui l'asserto.

○ **2.22** – Fissato $A$, che possiamo supporre maggiore o eguale a 0, siano

$$h_t = \min\left\{ h : \sum_{s=1}^{h} p_s - \sum_{r=1}^{k_{t-1}} q_r \geq A \right\}$$

$$k_t = \min\left\{ k : \sum_{s=1}^{h_t} p_s - \sum_{r=1}^{k} q_r < A \right\}, \quad k_o = 0 \ , \ t = 1, 2, 3, \ldots$$

$\{v_m\}$ sia così costituita: nei primi $h_1$ posti vi sono i $p_h$ nel loro ordine, dal posto $h_1 + 1$ a $h_1 + k_1$ vi sono i $q_k$ nel loro ordine col segno meno, e così via.



Allora $\sum_{m=1}^{\infty} v_m = A$, infatti se $p_{h(n)}$ e $q_{k(n)}$ sono gli ultimi elementi delle successioni $\{p_h\}$ e $\{q_k\}$ che compaiono in

$$V_n = \sum_{m=1}^{n} v_m, \text{ è } |V_n - A| \leq \max(p_{h(n)}, q_{k(n)}) \to 0$$

per $n \to +\infty$, poichè $u_n \to 0$.

## § 3 – Altri criteri. Metodi di sommazione. Somme infinite. Prodotti infiniti

**3.1** – $$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1})A_k - b_n A_{n-1} + b_{n+p}A_{n+p}\right| \leq \leq k\left\{\sum_{k-n}^{n+p-1} |b_{k+1} - b_k| + |b_n| + |b_{n+p}|\right\} \to 0$$

per $n, p \to +\infty$, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge e

$$\sum_{n=0}^{k} a_n b_n = -\sum_{n=0}^{k-1} A_n(b_{n+1} - b_n) + b_k A_k \to$$

$$\to -\sum_{n=0}^{\infty} A_n(b_{n+1} - b_n) \text{ per } k \to +\infty.$$

**3.2** – Posto $a_n = \exp(int)$ è

$$A_n = a_o + \ldots + a_n = \frac{1 - \exp(i(n+1)t)}{1 - \exp(it)} \text{ per } t \neq 2k\pi$$

quindi $|A_n| \leq \frac{2}{|1 - \exp(it)|}$; posto $b_n = \frac{1}{n}$ per IV.3.1 è

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(int)}{n}$ convergente per $t \neq 2k\pi$.

Se $t = 2k\pi$ la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, divergente.

**3.3 –** 1) $\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \left|\text{Re}\left(\frac{1-\exp(i(n+1)x)}{1-\exp(ix)}\right)\right| < K$

per $x \neq 2k\pi$ $k = 0, \pm 1, \ldots$, quindi per IV.3.1 la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ converge per $x \neq 2k\pi$. Per $x = 2k\pi$ diverge.

2) Procedendo come in 1) si ha che $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ n}$ converge per ogni $x$.

3) Poichè $\sin\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n+1} \sim \frac{x}{n^2}$, procedendo come in 1) ed applicando IV.3.1 si ottiene la convergenza per $x \neq 2k\pi$ e la divergenza per
$x = 2k\pi\ ,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .

**∘ 3.4 –** a) Sia $1 < s < k$,

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^s = \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \leq 1 + \frac{s+\delta}{n} \leq 1 + \frac{k}{n} \leq \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

definitivamente, per $0 < \delta < k - s$, per il criterio del rapporto segue l'asserto.

b) $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{1/n}{1/(n+1)}$, da cui l'asserto.

**∘ 3.5 –** a) Se $\lambda > 1$, sia $1 < k < \lambda$, quindi $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq k$ definitivamente e per IV.3.4 segue l'asserto.

b) Analogo ad a).

**∘ 3.6 –**

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\ln n} >$$
$$> 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n\ \ln\ n} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{H}{n^2} \geq \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

definitivamente, da cui l'asserto.

**3.7 –** $s = r\ ,\ a_o = b_o\ ,\ a_o + a_1 \neq b_1$ allora $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) =$

$$= \frac{(b_1 - a_1)n^r + \ldots + (b_r - a_r)n}{a_o n^r + \ldots + a_r} \to \frac{b_1 - a_1}{a_o} \quad \text{per } n \to +\infty,$$



se $a_o + a_1 < b_1$ è $\frac{b_1 - a_1}{a_o} > 1$;

se $a_o + a_1 > b_1$ è $\frac{b_1 - a_1}{a_o} < 1$ e per IV.3.5 segue l'asserto.

$s = r\ ,\ a_o = b_o\ ,\ a_o + a_1 = b_1$ allora $n\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right\} =$

$$= \frac{(b_2 - a_1 - a_2)n^r + \ldots - a_n n}{a_o n^r + \ldots + a_r} \to \frac{b_2 - a_1 - a_2}{a_o}$$

per $n \to +\infty$ e per IV.3.6 segue l'asserto.
Gli altri casi sono conseguenza immediata del criterio del rapporto.

**3.8 –** $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2|x|n^2 + |x|n}{2n^2 + 4n + 2},$$

per $|x| > 1$ diverge assolutamente:

per $x > 1$ diverge, per $x < -1$ oscilla fra limiti infiniti;

per $|x| < 1$ converge assolutamente;

per $x = 1$ diverge per IV.3.7;

per $x = -1$ converge per il criterio sulle serie a segni alternati.

**3.9 –** 1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+1}$, poichè $1 + a > 1$, per IV.3.7 diverge.

2) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 + (a+b)n + ab}{n^2 + (c+1)n + c}$, se $a+b \geq c$ diverge, se $a+b < c$ converge.

**∘ 3.10 –** La somma dei termini con denominatore di $k$ cifre è minore di

$$(9^k - 9^{k-1}) \quad \frac{1}{10^{k-1}} = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} 8;$$

la serie in questione ha somma inferiore a $8 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k = 80.$

**3.11 –** Basta considerare la sottoserie dei termini positivi e la sottoserie dei termini negativi.

∘∘ **3.12** – a) Ovvio.

b) Se $s_n \to s$ e $p_{nh} \to 0$ per $n \to +\infty$ per ogni $h$, fissato $\varepsilon > 0$ esistono $H(\varepsilon)$ e $N(\varepsilon, H)$ tali che per $h > H$ è

$|s_h - s| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e per $n > N$ è $\displaystyle\sum_{h=0}^{H} p_{nh} < \frac{\varepsilon}{4\sup\limits_n |s_n|}$ ; allora per $n > N$ è

$$|t_n - s| = \left|\sum_{h=0}^{\infty} p_{nh}s_h - s\right| = \left|\sum_{h=0}^{\infty} p_{nh}(s_h - s)\right| \leq$$
$$\leq \left|\sum_{h=0}^{H} p_{nh}(s_h - s)\right| + \left|\sum_{h=H+1}^{\infty} p_{nh}(s_h - s)\right| < \varepsilon,$$

quindi $t_n \to s$ per $n \to +\infty$.

Se $p_{n\overline{h}} \not\to 0$ per $n \to +\infty$, la successione $\{s_n\}$, con $s_n = 0$ per $n \neq \overline{h}$, $s_{\overline{h}} = 1$, tende a 0, mentre $t_n = p_{n\overline{h}}$ non tende a 0 per $n \to +\infty$.

**3.13** – Posto $p_{nh} = \dfrac{1}{n+1}$ per $0 \leq h \leq n$ , $p_{nh} = 0$ per $h > n$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ è $H_n^{k+1} = \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} p_{nh} H_n^k$ e per IV.3.12 segue l'asserto.

**3.14** –
$$H_n^{k-1} = (n+1)H_n^k - nH_{n-1}^k = o(n),$$
$$H_n^{k-2} = (n+1)H_n^{k-1} - nH_{n-1}^{k-1} = o(n^2), \ldots;$$
$$A_n = H^{\circ} = (n+1)H_n^1 - nH_{n-1}^1 = o(n^k),$$
$$a_n = A_n - A_{n-1} = o(n^k).$$

∘∘ **3.15** – a) Per $k = 0$ è vera; supponiamola vera per $k - 1$:

$$A_n^k = \sum_{i=0}^{n} A_i^{k-1} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{r=0}^{i} \binom{i-r+k-1}{k-1} a_r =$$
$$= \sum_{r=0}^{n}\sum_{i=r}^{n} \binom{i-r+k-1}{k-1} a_r \quad \text{per I.2.9},$$
$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i-r+k-1}{k-1} = \binom{n-r-k}{k} \text{ per I.3.9},$$



da cui l'asserto.

b) $C_n^{k+1} = \dfrac{A_n^{k+1}}{E_n^{k+1}} = \displaystyle\sum_{h=0}^{n} \frac{E_h^{k-1}}{E_n^k} C_n^k$, posto $p_{nh} = \dfrac{E_h^{k-1}}{E_n^k}$ per $0 \leq h \leq n$ e $p_{nh} = 0$ per $h > n$, poichè $E_n^k = \displaystyle\sum_{h=0}^{n} E_h^{h-1}$, è $\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} p_{nh} = 1$ e $p_{nh} \to 0$ per $n \to +\infty$ per ogni $h$, quindi per IV.3.12 segue l'asserto.

Diamo l'enunciato di due teoremi che parzialmente invertono quello appena dimostrato:

*Teorema 1*

Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A(C, k)$ per qualche $k$ e $a_n = O(n^{-1})$ allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente.

*Teorema 2*

Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A(C, k)$ per qualche $k$ e $na_n > -H$ allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente.

**3.16** – Ogni $\Omega_n$ è finito con al più $[ns]$ elementi, dove $s = \displaystyle\sum_{j\in\Omega} f(j)$.

Poichè $\Omega^+ = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, si ha l'asserto.

**3.17** – Se $\alpha = \sup\limits_{\Gamma\in\mathcal{P}^*(\Omega)} s_\Gamma < +\infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{\Gamma} \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ tale che $0 \leq \alpha - s_{\overline{\Gamma}} < \varepsilon$; poichè se $\Gamma \supset \overline{\Gamma}$ , $\Gamma \in \mathcal{P}^*(\Omega)$, è $s_\Gamma \geq s_{\overline{\Gamma}}$, si ha la sommabilità di $f$.

Supponiamo che $f$ sia sommabile e sia $s = \displaystyle\sum_{j\in\Omega} f(j)$.

Allora esiste $\overline{\Gamma} \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ tale che se $\Gamma \supset \overline{\Gamma}$, $\Gamma \in \mathcal{P}^*(\Omega)$, è $|s - s_\Gamma| < 1$, quindi $\sup\limits_{\Gamma\in\mathcal{P}^*(\Omega)} s_\Gamma \leq \sup\limits_{\Gamma\in\mathcal{P}^*(\Omega)} s_{\Gamma\cup\overline{\Gamma}} < s + 1$ .

**3.18** – Ricordando IV.3.1 basta mostrare che
$$\sup_{\Gamma\in\mathcal{P}^*(\mathbb{N}'\times\mathbb{N}')} \sum_{(n,m)\in\Gamma} f(n,m) \quad \text{è finito.}$$

Poichè $f$ è positiva ed ogni $\Gamma \in \mathcal{P}^*(\mathbb{N}' \times \mathbb{N}')$ è contenuto in un $Q_k$ per $k$ opportuno, basta mostrare che

$$\sup_{Q_k} \sum_{(n,m)\in Q_k} f(n,m) < +\infty :$$

$$\sum_{(n,m)\in Q_k} \frac{1}{(n!)^m} = \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{(n!)^m} <$$

$$< \sum_{n=1}^{k} \left( \frac{1-\frac{1}{(n!)^{k+1}}}{1-\frac{1}{n!}} - 1 \right) < \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!-1} <$$

$$< \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n-1)!} < e.$$

○ **3.19** – Il numero dei punti di $P_k$ (vedi suggerimento) è $8k$ e, su $P_k$, è $\frac{1}{2k^2} \le \frac{1}{n^2+m^2} \le \frac{1}{k^2}$, quindi

$$\frac{8k}{2^\alpha k^{2\alpha}} < \sum_{P_k} \frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha} < \frac{8k}{k^{2\alpha}}$$

Se $Q_k$ è l'intero quadrato, otteniamo

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{8}{2^\alpha s^{2\alpha-1}} < \sum_{Q_k} \frac{1}{(n^2+m^2)^\alpha} < \sum_{s=1}^{k} \frac{8}{s^{2\alpha-1}}.$$

Ricordando IV.3.17 e ricordando che ogni parte finita di $\mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ è contenuta in un $Q_k$, si ha la sommabilità solo per $\alpha > 1$.

**3.20** – Posto $s^+ = \sum_{j\in\Omega} f^+(j)$ e $s^- = \sum_{j\in\Omega} f^-(j)$ , per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\Gamma_1 \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ e $\Gamma_2 \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ tali che se $\Gamma \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ e $\Gamma \supset \Gamma_1$ è

$$0 \le s^+ - \sum_{j\in\Gamma} f^+(j) < \varepsilon$$

e se $\Gamma \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ e $\Gamma \supset \Gamma_2$ è

$$0 \le s^- - \sum_{j\in\Gamma} f^-(j) < \varepsilon.$$



Da questo segue che se $\Gamma \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ e $\Gamma \supset \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ è

$$\left|(s^+ - s) - \sum_{j\in\Gamma} f(j)\right| = \left|(s^+ - \sum_{j\in\Gamma} f^+(j)) - (s^- - \sum_{j\in\Gamma} f^-(j))\right| < \varepsilon.$$

Viceversa sia $f$ sommabile con somma $s$ e, per esempio, $f^+$ non sommabile e $\overline{\Gamma} \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ sia tale che $|s - s_\Gamma| < 1$ per ogni $\Gamma \supset \overline{\Gamma}$ finito.
Posto $H = \sum_{j\in\overline{\Gamma}} f^-(j)$ e $\Omega^+ = \{j \in \Omega : f^+(j) > 0\}$, esiste $\tilde{\Gamma} \subset \Omega^+$ finito tale che $s^+_{\tilde{\Gamma}} = s_{\tilde{\Gamma}} > s + H + 1$; allora
$s_{\overline{\Gamma}\cup\tilde{\Gamma}} = s^+_{\overline{\Gamma}\cup\tilde{\Gamma}} - s^-_{\overline{\Gamma}\cup\tilde{\Gamma}} = s^+_{\overline{\Gamma}\cup\tilde{\Gamma}} - s^-_{\overline{\Gamma}} > s^+_{\tilde{\Gamma}} - H > s + 1$, assurdo.

**3.21** – Ovviamente è $s'' \le s'$. D'altra parte se $\Gamma \in \mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ e $\overline{n} = \max\Gamma$ si ha $s_\Gamma \le S_{\overline{n}} = f(1) + f(2) + \ldots + f(\overline{n})$, da cui l'asserto.

**3.22** – La prima osservazione segue direttamente da IV.3.20 e IV.3.21. Sia ora $f$ sommabile, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{\Gamma} \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ tale che se $\Gamma \in \mathcal{P}^*(\Omega)$ e $\Gamma \supset \overline{\Gamma}$ è $|s - s_\Gamma| < \varepsilon$. Posto $\overline{n} = \max\overline{\Gamma}$ è allora

$$|s - \{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)\}| < \varepsilon$$

per ogni $n \ge \overline{n}$, cioè la serie converge ad $s$.

○ **3.23** – Per ogni $m$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(n,m)$ è convergente, poichè le sue somme parziali non sono altro che somme estese a particolari parti finite di $\mathbb{N}^2$.
Sia $A = \sum_{\mathbb{N}^2} f(n,m)$ e $B$ sia il valore (eventualemnte $+\infty$) del secondo membro. Mostriamo che $B \le A$. Se $B > A$, allora esisterebbe $k$ tale che

$\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} f(n,m) > A$, ma ciò significa che $\sup_h \sum_{\substack{m\le k\\ n\le h}} f(n,m) > A$, assurdo.

D'altra parte se $\Gamma \in \mathcal{P}^*(\mathbb{N}^2)$ esso è ovviamente contenuto in un quadrato di lato $k$ e quindi

$$\sum_{\Gamma} f(n,m) \le \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k} f(n,m) \le \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} f(n,m) \le B.$$

Da ciò segue $A \le B$ e quindi l'uguaglianza.

**3.24** – $u_n = \dfrac{t_n}{t_{n-1}} \to \dfrac{t}{t} = 1$ per $n \to +\infty$.

**3.25** – Condizione necessaria : sia $t_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ e $t_n \to A \neq 0$ per $n \to +\infty$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} = \overline{n}(\varepsilon)$ tale che per $n \ge \overline{n}$ sia $|t_n| > \dfrac{A}{2}$ e per ogni $p > 0$ intero sia $|t_{n+p} - t_n| < \dfrac{\varepsilon A}{2}$; allora è

$$\left|\frac{t_{n+p}}{t_n} - 1\right| = |u_{n+1}\cdot u_{n+2}\dots u_{n+p} - 1| < \varepsilon.$$

Condizione sufficiente : per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} = \overline{n}(\varepsilon)$ tale che per $n \ge \overline{n}$ e $p > 0$ intero è

$$|u_{n+1}\cdot u_{n+2}\dots u_{n+p} - 1| = \left|\frac{t_{n+p}}{t_n} - 1\right| < \varepsilon$$

allora $\{t_n\}$ è limitata, $|t_n| < K$, da cui $|t_{n+p} - t_n| < K\varepsilon$, quindi $\{t_n\}$ converge.

**3.26** – $\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+a_k)$; se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge è $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, quindi $\ln(1+a_k) \sim a_k$ e $\ln P_n$ converge; se $\ln P_n$ converge è $\ln(1+a_k) \to 0$ per $k \to +\infty$, cioè $a_k \to 0$ per $k \to +\infty$ , $\ln(1+a_k) \sim a_k$, quindi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

**3.27** – Per IV.2.17 se $x \ge 0$ è $1+x \le e^x$, da cui $p_N^* \le e^{(|u_1| + \dots + |u_N|)}$.
Per $N = 1$ è $|u_1| = |u_1|$, supponiamo $|p_{N-1} - 1| \le p_{N-1}^* - 1$ ,
$|p_N - 1| \le |p_{N-1} - 1|\cdot|1 + u_{k+1}| + |u_{k+1}| \le$

$$\le (p_{N-1}^* - 1)(1 + |u_{k+1}|) + |u_{k+1}| = p_N^* - 1.$$

**3.28** – Per la IV.3.27 se è verificata la condizione di Cauchy per $\prod_{n=0}^{\infty}(1+|a_n|)$ è verificata anche per $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$, da cui l'asserto.

# Capitolo V

# SPAZI METRICI E TOPOLOGICI

## § 1 – Spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$. Spazi vettoriali normati

**1.1** – $\|\underline{x} - \underline{y}\|^2 + \|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = (\underline{x} - \underline{y}|\underline{x} + \underline{y}) = 2(\underline{x}|\underline{x}) + 2(\underline{y}|\underline{y})$.

**1.2** – $\underline{a}_n = \Big([(-1)^n + 1]n \ , \ [(-1)^{n+1} + 1]n \ ,0\Big)$.

**1.3** – $\underline{x}_n = (\frac{1}{n}, 1)$ ; $\underline{y}_n = (1, \frac{1}{n})$ ; $(\underline{x}_n|\underline{y}_n) = \frac{2}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

**1.4** – 1) $\max_{i=1,\dots,n} |x_i| = 0$ se e solo se $\underline{x} = \underline{0}$;

$\max_{i=1,\dots,n} |\lambda x_i| = |\lambda| \cdot \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$;

$\max_{i=1,\dots,n} |x_i + y_i| \le \max_{i=1,\dots,n} |x_i| + \max_{i=1,\dots,n} |y_i|$ ;

analogamente per $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

2) $\max_{i=1,\dots,n} |x_i| \le \|\underline{x}\|$ ovvio;

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \le \sqrt{n}\cdot \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

3) $\|\underline{x}\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ ovvio;

$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \le \sqrt{n}\cdot\|\underline{x}\|$ per la I.5.14 con $\nu = 2$.

**1.5** – Poniamo $A = (x|x)$ , $B = |(x|y)|$ , $C = (y|y)$.
Se $B = 0$ la disuguaglianza è ovvia; altrimenti sia $\alpha = \dfrac{B}{(y|x)}$; è $|\alpha| = 1$. Per ogni $r \in \mathbb{R}$ si ha:

$0 \le (x - r\alpha y|x - r\alpha y) = (x|x) - r\alpha(y|x) - r\overline{\alpha}(x|y) + r^2(y|y)$,

cioè $Cr^2 - 2Br + A \ge 0$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.
Se $C = 0$, per la 3) è $B = 0$ e la disuguaglianza è verificata.
Altrimenti il discriminante del trinomio precedente deve essere minore o uguale a zero, cioè $B^2 \le AC$.
Posto $\|x\| = (x|x)^{1/2}$, le proprietà 1) e 2) delle norme (vedi V.1.4) sono immediate.

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x|y) + (y|x) = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} (x|y) \le \\ &\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x|y)| \le \\ &\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)\end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.

**1.6 –** Se la norma è indotta da un prodotto interno si procede come in V.1.1.

○ **1.7 –** Considerati i punti $\underline{x} = (1,0,0,\dots,0)$ , $\underline{y} = (0,1,0,\dots,0)$ si vede che

$$4 = 2\|\underline{x}\|_o^2 + 2\|\underline{y}\|_o^2 > \|\underline{x} - \underline{y}\|_o^2 + \|\underline{x} + \underline{y}\|_o^2 = 2$$

e analogamente per $\|\cdot\|^o$, quindi per V.1.6 si ha l'asserto.

**1.8 –** 1) Ovvia; 2) Ovvia;
3) $U_1 = \{y \in V : \|x - y\| < \alpha\}$ ,
$U_2 = \{y \in V : \|x - y\| < \dfrac{\alpha}{2}\}$,
per ogni $y \in U_2$ sia $W = \{z \in V : \|y - z\| < \dfrac{\alpha}{2}\}$, allora $W \subset U_1$.

**1.9 –** Mostriamo che gli intorni della topologia $\tau_A$ definita da $\|\cdot\|_A$ sono tutti e soli gli intorni della topologia $\tau_B$ definita da $\|\cdot\|_B$.
Sia $U$ un intorno di $\underline{x}$ in $\tau_A$, allora esiste
$V_\alpha = \{\underline{y} : \underline{y} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{x} - \underline{y}\|_A < \alpha\}$ con $V_\alpha \subset U$; l'insieme
$W_{\alpha h} = \{\underline{y} : \underline{y} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{x} - \underline{y}\|_B < \alpha h\}$ è contenuto in $V_\alpha$, quindi $U$ è un intorno di $\underline{x}$ in $\tau_b$.
In modo analogo si dimostra il viceversa, da cui l'asserto.



**1.10 –** 1) Chiuso, connesso, convesso, compatto;
2) per $n > 1$ è connesso; per $n = 1$ non è connesso;
3) l'insieme è il segmento congiungente $\underline{a}$ e $\underline{b}$; per $n = 1$ è aperto, connesso, convesso, per $n > 1$ è connesso e convesso;
4) l'insieme è un iperpiano di $\mathbb{R}^n$; è chiuso, connesso, convesso, per $n = 1$ è anche compatto (si riduce all'origine);
5) l'insieme è un iperpiano di $\mathbb{R}^n$ privato dell'origine; per $n = 1$ è aperto, chiuso, compatto (è $\emptyset$); per $n = 2$ non vale alcuna delle affermazioni; per $n > 2$ è connesso;
6) per $n = 1$ è compatto, per $n > 1$ è chiuso.

**1.11 –** L'insieme non è né aperto né chiuso, né convesso.

**1.12 –** Sia $\sup T \notin T$, allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{t}$ con $\sup T - \varepsilon < \bar{t} < \sup T$, quindi, per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, $\sup T$ è di accumulazione per $T$.

**1.13 –** Sia $\{r_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, la successione dei razionali di $A$, sia $I_1$ l'unione di tutti gli intervalli aperti contenenti $r_1$ e contenuti in $A$, sia $k_2$ il minimo intero per cui $r_{k_2} \notin I_1$ e sia $I_2$ l'unione di tutti gli intervalli aperti contenenti $r_{k_2}$ e contenuti in $A$, e così via. Si ottiene così una successione $\{I_h\}$ di intervalli aperti a due a due disgiunti con $A = \bigcup_h I_h$

**1.14 –** $I_n = \{x : \dfrac{1}{n} < x < 1 - \dfrac{1}{n}\}$, $n = 2, 3, \dots$ .

**1.15 –** Ad ogni $\underline{x} \in T$ si associ un quadrato aperto con centro in $\underline{x}$, con un lato parallelo a $T$, tutto contenuto in $A$: si ottiene così una copertura di $T$. Si estragga una copertura finita contenente i due quadrati centrati sugli estremi; sia $l$ la lunghezza di $T$ e $\delta$ il minimo dei lati dei quadrati della sottocopertura, il rettangolo richiesto è quello centrato in $T$ con lati di lunghezza di $l + \delta$ e $\delta$.

○ **1.16 –** I punti di accumulazione sono $\{\dfrac{1}{k} : k \in \mathbb{N}, k \ne 0\} \cup \{0\}$; che siano di accumulazione è ovvio, mostriamo che sono gli unici.

Se $\gamma, \delta > 0$ sono tali che $\dfrac{1}{k+1} < \gamma - \delta < \gamma < \gamma + \delta < \dfrac{1}{k}$, affinchè $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} < \gamma + \delta < \dfrac{1}{k}$ è necessario che siano $m, n \geq k+1$; affinchè $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} > \gamma - \delta > \dfrac{1}{k+1}$ è necessario che siano $m \leq 2(k+1)$ e $n < \dfrac{k+1}{(k+1)(\gamma-\delta)-1}$, oppure $n \leq 2(k+1)$ e $m < \dfrac{k+1}{(k+1)(\gamma-\delta)-1}$, quindi in $(\gamma-\delta, \gamma+\delta)$ cadono al più un numero finito di punti dell'insieme.

∘ **1.17** – Poichè $\{m\gamma - [m\gamma]\} \subset [0,1]$ e al variare di $m$ in $\mathbb{Z}$ i suoi elementi sono tutti distinti (per l'irrazionalità di $\gamma$), procedendo come in III.3.15 si vede che l'origine è punto di accumulazione per $\{m\gamma - [m\gamma]\}$ e, in conseguenza di ciò, che $\{m\gamma + n\}$ è denso in $[0,1]$, quindi ovviamente tale insieme è denso in tutto $\mathbb{R}$, da cui l'asserto.

**1.18** – Vedi V.1.16.

**1.19** – Sia $\bigcap_n F_n = \emptyset$ e sia $F_1$ limitato, allora $F_1 \subset \bigcup_{n=2}^{\infty} F_n^C$; esistono dunque $F_{n_1}, F_{n_2}, \ldots, F_{n_k}$ con $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ e $F_1 \subset \bigcup_{i=1}^{k} F_{n+i}^C$, allora $F_1^C \cup (\bigcup_{i=1}^{k} F_{n_1}^C) = \mathbb{R}^n$, quindi $F_1 \cap (\bigcap_{i=1}^{k} F_{n_1}^C) = F_{n_k} = \emptyset$, assurdo.

∘ **1.20** – Sia $T_h = \{\underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{R}^n \;,\; s(x, \Omega^C) \geq \frac{1}{h}\}$,
sia $K_h = T_h \cap S_h$,
ove $S_h = \{\underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{R}^n \;,\; \|\underline{x}\| \leq h\}$,
allora la successione $\{K_h\}$ così costruita gode della proprietà richiesta.

**1.21** – Se $\underline{x}, \underline{y} \in C$, allora $\underline{x}, \underline{y} \in C_{\overline{n}}$, quindi $\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} \in C_{\overline{n}}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, da cui l'asserto.



**1.22** – La prima parte è ovvia, per la seconda basta pensare, ad esempio, a due convessi disgiunti.

**1.23** – Sia $\mathbb{R}^n = A \cup B$, con $A, B$ aperti disgiunti; se $\underline{x} \in A, \underline{y} \in B$, i punti $\underline{z} = \lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ per $0 \leq \lambda \leq 1$.
Sia $\overline{\lambda} = \sup\{\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1 \;,\; \underline{z} = \lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} \in B\}$.
Supponiamo $\underline{z}^* = \overline{\lambda}\underline{x} + (1-\overline{\lambda})\underline{y} \in B$, esiste allora un intorno di raggio $\varepsilon > 0$ di $\underline{z}^*$ tutto contenuto in $B$, ma allora per ogni $\lambda$ con
$|\lambda - \overline{\lambda}| < \dfrac{\varepsilon}{\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|}$ è $\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} \in B$, assurdo;
in modo analogo si mostra che $\underline{z}^* \notin A$, quindi $\mathbb{R}^n$ è connesso.

**1.24** – Se $A$ è aperto e chiuso e distinto da $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbb{R}^n = A \cup A^C$, sarebbe sconnesso, assurdo per V.1.23.

∘∘ **1.25** – Poichè $C \subset [0,1]$ e $0, 1 \in C$, ogni $x > 1$ o $x < 0$ è interno a $C^C$.
Sia $x \in (0,1), x \notin C$, allora $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k}$ ove $c_k$ assume i valori 0, 1, 2, esiste qualche $c_k$ uguale a 1 ed inoltre, se
$k^* = \min\{k : c_k = 1\}$, non può essere $c_k$ sempre eguale a 0 o sempre eguale a 2 per $k > k^*$. Posto

$$\alpha = \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{1}{3^{k^*}} \quad \text{e} \quad \beta = \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{2}{3^{k^*}},$$

mostriamo che non esiste alcun $\gamma \in C$ con $\alpha < \gamma < \beta$.
Sia $\gamma \in C$, $\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{3^k}$, sia $\overline{k} = \min\{k : \gamma_k \neq c_k\}, \overline{k} \leq k^*$; sia, per esempio $\gamma_{\overline{k}} > c_{\overline{k}}$, allora

$$\gamma \geq \sum_{k=1}^{\overline{k}} \frac{c_k}{3^k} + \sum_{k=\overline{k}+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \geq \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{2}{3^{k^*}},$$

quindi $\gamma \geq \beta$; se $\gamma_{\overline{k}} < c_{\overline{k}}$ si mostra in modo analogo che $\gamma \leq \alpha$, quindi $x$ è interno a $C^C$.

∘∘ **1.26** – Sia $A = \{\{a_n\}, n \in \mathbb{N}, a_n = 0, 1,\; a_n$ non definitivamente eguale a $1\} \cup \{1\}$.
$A$ può essere posto in corrispondenza biunivoca con $[0,1]$ (rappresentazione binaria) ed evidentemente $A$ può essere posto in

corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di $C$ ma $C$ è un sottoinsieme di $[0,1]$, da cui l'asserto.

∘ **1.27** – L'asserto segue osservando che fissato $\alpha \in C$, $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k}$, gli infiniti numeri della forma $\beta = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{3^k}$, (se $c_k$ non è definitivamente nullo) oppure $\beta = \alpha + \frac{2}{3^n}$ (se $c_k$ è definitivamente nullo) per $n$ abbastanza grande appartengono a $C$ e sono tali che $0 \le |\alpha - \beta| \le \frac{2}{3^n}$, quindi $\alpha$ è di accumulazione per $C$ e $C$ è chiuso per V.1.25.

## § 2 – Spazi metrici e spazi topologici

**2.1** – Si procede come in V.1.8.

**2.2** – Le $\alpha$) e $\beta$) di V.2.1 sono conseguenza immediata delle 1) e 2) di V.1.4.
Per la 8) $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \le \|x-z\| +$
$+ \|z-x\| = d(x,z) + d(z,y)$ per la 3) di V.1.4.

**2.3** – 1) Procedendo in modo analogo a V.1.9 si ha l'asserto.
2) Se $\{x_n\}$ è di Cauchy in $(X;\rho)$ è $\rho(x_n,x_m) \to 0$ per $n,m \to +\infty$, allora anche $\sigma(x_n,x_m) \to 0$ per $n,m \to +\infty$ e viceversa.

**2.4** – 1) $\sigma(x,y) \ge 0$ , $0 = \sigma(x,y) = \min[\rho(x,y);1] = \rho(x,y)$, da cui $x = y$;
$\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$ ; $\sigma(x,y) = \min[\rho(x,y);1] \le \min[\rho(x,z);1] +$
$+ \min[\rho(z,y);1] = \sigma(x,z) + \sigma(z,y)$.
2) Supponiamo esista $h > 0$ tale che $h\rho(x,y) \le \sigma(x,y) \le 1$, poiché $\rho$ non è limitata esistono $\overline{x}, \overline{y}$ con $\rho(\overline{x},\overline{y}) > \frac{1}{h}$, assurdo.



3) $U(x;\sigma;\alpha) = \{y : y \in X, \sigma(x,y) < \alpha\}$;
$V(x;\rho;\alpha) = \{y : y \in X, \rho(x,y) < \alpha\}$;
$V(x;\rho;\beta) \subseteq U(x:\sigma;\alpha)$ e $U(x;\sigma;\beta) \subseteq V(x;\rho;\alpha)$;
per $\beta = \min(\alpha;1)$, segue l'asserto.
4) Segue da 3).

**2.5** – $A = \{n : n \in \mathbb{N}, n \ge 2\}$ $\quad B = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \ge 2\}$.

**2.6** – Lo scarto fra un insieme $A$ e un suo sottoinsieme proprio $B$ è 0, mentre $A \ne B$.

**2.7** – Banale.

**2.8** – 1) $\mathcal{U}(x;1/2) = \{x\}$;
2) per 1) l'insieme costituito da un singolo punto è aperto, quindi ogni insieme è aperto e quindi anche chiuso;
3) per la 2) la copertura di un insieme costituita dai singoli punti è aperta, il che implica l'asserto;
4) immediato poichè $d(x;y) \le 1$;
5) immediato per 2);
6) segue dalla definizione di limite prendendo $\varepsilon < 1$;
7) una successione è di Cauchy se e solo se è definitivamente costante, quindi l'asserto.

**2.9** – $E^C = \{p : p \in \mathbb{Q}, d(p,0) < \sqrt{3} | d(p,0) > \sqrt{5}\}$, $E^C$ è chiaramente aperto; $E$ è limitato; consideriamo la seguente collezione di aperti $U_\alpha = \{p : p \in \mathbb{Q}\ ,\ d(p,0) < \alpha\ ,\ 0 < \alpha < \sqrt{5}\}$ è una copertura di $E$ dalla quale non si può estrarre una sottocopertura finita.

**2.10** – Sia $x \in A \cap \overline{B}$, esiste un intorno $V$ di $x$ con $V \subset A$ e $V \cap B \ne \emptyset$; poichè ogni intorno $U$ di $x$ contiene un intorno con le proprietà di $V$, si ha $U \cap (A \cap B) \ne \emptyset$, da cui l'asserto.
Se $A = \mathbb{Q}$ , $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ allora $A \cap \overline{B} = \mathbb{Q}$ e $\overline{A \cap B} = \emptyset$.

**2.11** – Sia $x \in \overline{A}$ isolato, esiste un intorno $V$ di $x$ tale che $V \cap \overline{A} = \{x\}$, allora anche $V \cap A = \{x\}$ quindi $x \in A$ ed è isolato; assurdo.

**2.12** – Sia $x \in X$ , isolato, esiste un intorno $V$ di $x$ tale che $V \cap X = \{x\}$, se $x \in A$ allora $A^C$ non è denso e viceversa, assurdo.

**2.13** – L'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ a coordinate reazionali è numerabile e denso in $\mathbb{R}^n$.

∘ **2.14** – Per ogni $\delta$ le scelte possibili sono in numero finito, poichè la successione $\{x_j\}$, per costruzione, non può avere punti di accumulazione. Facendo assumere a $\delta$ i valori $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ si viene a costruire un insieme numerabile denso in $X$.

∘ **2.15** – Mostriamo che $\mathcal{U}_x$ è una base di intorni per $x$ secondo la definizione in V.1.8.

1) per ogni $U \in \mathcal{U}_x$ è $x \in U$ per costruzione;

2) $U, V \in \mathcal{U}_x$, esiste $\alpha \in \mathbb{Q}$ tale che $B(x, \alpha) \subset U \cup V$, ove $B(x, \alpha) = \{y : y \in X, d(x, y) < \alpha\}$, se $a \in A \cap B(x, \frac{\alpha}{3})$ allora $B(a, \frac{\alpha}{2}) \in \mathcal{U}_x$ e $B(a, \frac{\alpha}{2}) \subset U \cup V$;

3) $U \in \mathcal{U}_x$, esiste $\alpha \in \mathbb{Q}$ tale che $B(x, \alpha) \subset U$, se $a \in A \cap B(x, \frac{\alpha}{3})$ allora $V = B(a, \frac{\alpha}{2}) \in \mathcal{U}_x$ , $V \subset U$ e $V \in \mathcal{U}_y$ per ogni $y \in V$.

∘∘ **2.16** – $\overline{\mathcal{V}}$ è una copertura di $X$ numerabile, ad ogni $V \in \overline{\mathcal{V}}$ associamo un $G \in \mathcal{G}$ con $G \supset V$, otteniamo così una famiglia $\overline{\mathcal{G}}$ numerabile, $\overline{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$ e copertura di $X$.

**2.17** – Per assurdo, ad ogni $x \in X$ si associ un intorno $U_x$ contenente un numero finito di punti $E$, la famiglia $\{U_x\}$ è una copertura di $X$; poichè $X$ è compatto si può estrarre una sottocopertura finita, ma allora i punti di $E$ sono in un numero finito, assurdo.

**2.18** – Sia $\{x_n\} \subset X$ una successione di Cauchy; essa non può avere più di un valore limite: infatti se $x$ e $x^*$ fossero due valori limite, preso $\varepsilon < \frac{1}{3} d(x, x^*)$ avremmo che per $m$ ed $n$ abbastanza grandi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ mentre per infiniti indici $m$ è $d(x_m, x) < \varepsilon$ e per infiniti indici $n$ è $d(x_n, x^*) < \varepsilon$, assurdo.



Se $\{x_n\}$ non costituisce un insieme infinito di $X$, allora contiene una successione costante e quindi per quanto sopra converge a tale punto.

Se $\{x_n\}$ costituisce un insieme infinito, allora per V.2.17 ha un punto di accumulazione. Tale punto è un valore limite di $\{x_n\}$ e, per quanto sopra essendo unico, è il limite di $x_n$.
In ogni caso $x_n \to x \in X$, cioè $X$ è completo.

∘ **2.19** – Sia $\mathcal{G}$ una copertura di $X$, per V.2.14 e V.2.16 esiste una sottocopertura numerabile $\overline{\mathcal{G}} = \{G_n\}$. Supponiamo che non ci sia alcuna sottocopertura finita, allora posto

$$F_n = \left( \bigcup_{k=1}^{n} G_k \right)^C \quad \text{è } F_n \supset F_{n+1}, \ F_n \neq \emptyset \text{ e } \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset.$$

Sia $E$ un insieme costruito prendendo un punto da ogni $F_n$, poichè $E$ è infinito esiste un punto $x$ di accumulazione per $E$ e quindi $x \in F_n, n = 1, 2, \ldots$, cioè $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, assurdo.

**2.20** – $d$ deve verificare le proprietà $\alpha)$ , $\beta)$ , $\gamma)$ elencate in V.2.1.
Le $\alpha)$ e $\beta)$ sono ovvie.

$$\begin{aligned} d((x_1, y_1), (x_2 y_2)) &= d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2) \leq \\ &\leq d_1(x_1, x_3) + d_1(x_3, x_2) + \\ &+ d_2(y_1, y_3) + d_2(y_3, y_2) = \\ &= d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d((x_3, y_3), (x_2, y_2)), \end{aligned}$$

cioè la $\gamma)$.

**2.21** – È immediato verificare che tale famiglia è una topologia; dati due punti $\underline{x}, \underline{y}$, se $\|\underline{x}\| \geq \|\underline{y}\|$ ogni disco contenente $\underline{x}$ contiene anche $\underline{y}$, quindi la topologia non è di Hausdorff.

∘ **2.22** – Sia $\mathcal{G}$ una copertura aperta di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, sia $G \in \mathcal{G}$ tale che $\{\infty\} \in G$, allora $G^C$ è chiuso e limitato, cioè compatto, nella topologia usuale di $\mathbb{C}$, quindi da $\mathcal{G}$ si può estrarre una copertura finita $\overline{\mathcal{G}}$ di $G^C$; la famiglia ottenuta aggiungendo a $\overline{\mathcal{G}}$ l'insieme $G$ è una sottocopertura finita di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, da cui l'asserto.

**2.23** – Fissato $(x_\circ, y_\circ) \in X \times Y$ sia
$\mathcal{U}_\circ \times \mathcal{V}_\circ = \{U \times V : U \in \mathcal{U}, x_\circ \in U, V \in \mathcal{V}, y_\circ \in V\}$,
tale famiglia è una base di intorni di $(x_\circ, y_\circ)$, infatti:

1)per ogni $W \in \mathcal{U}_\circ \times \mathcal{V}_\circ$ è $(x_\circ, y_\circ) \in W$;

2) siano $W_1, W_2 \in \mathcal{U}_\circ \times \mathcal{V}_\circ, W_1 = U_1 \times V_1, W_2 = U_2 \times V_2$, esistono $U \in \mathcal{U}_\circ$ con $U \subset U_1 \cap U_2$ e $V \in \mathcal{V}_\circ$ con $V \subset V_1 \cap V_2$, allora $W = U \times V \subset W_1 \cap W_2$ e $W \in \mathcal{U}_\circ \times \mathcal{V}_\circ$;

3) sia $W \in \mathcal{U}_\circ \times \mathcal{V}_\circ, W = U \times V$, esistono un $U_1 \in \mathcal{U}_\circ$ tale che per ogni $x \in U_1$ esiste $U_2 \in \mathcal{U}_x$ con $U_2 \subset U$ ed un $V_1 \in \mathcal{V}_\circ$ tale che per ogni $y \in V_1$ esiste $V_2 \in \mathcal{V}_y$ con $V_2 \subset V_1$, allora $W_1 = U_1 \times V_1$ è tale che $W_1 \in \mathcal{U}_\circ \times \mathcal{V}_\circ$, per ogni $(\underline{x}, \underline{y}) \in W_1$ è $(\underline{x}, \underline{y}) \in U_2 \times V_2 = W_2$ e $W_2 \subset W$.

# Capitolo VI

# FUNZIONI. LIMITI DI FUNZIONI

## § 1 – Prime proprietà delle funzioni

**1.1** – 1) dominio $\mathbb{R}^2 - \{0\}$; codominio $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$;

2) dominio $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, sfera chiusa con centro nell'origine e raggio 1; codominio $[0,1]$;

3) dominio $\mathbb{R}^2 - \{0\}$; codominio $\mathbb{R}^+ - \{0\}$;

4) dominio $z, y$ arbitrari, $0 \leq x \leq 2$; codominio $\mathbb{R}^+$.

**1.2** – 1) Il dominio di $\ln(1 - x^2 - y^2)$ è il disco $x^2 + y^2 < 1$, il dominio di $\sqrt{x}$ è il semipiano $x \geq 0$, il dominio di $f(x,y)$ è l'intersezione dei due domini trovati, cioè l'insieme

$$\{(x,y) : x \geq 0 \ , \ x^2 + y^2 < 1\}.$$

2) Il dominio è l'insieme

$$\{(x,y) : x > y \ , \ x^2 - y^2 \geq 1\},$$

parte di piano delimitata dal ramo di iperbole $x^2 - y^2 = 1$ con $x > 0$.

**1.3** – $f(t^2) = (t^2)^3 + 1 = t^6 + 1 \ ; \ \{f(t)\}^2 = (t^3+1)^2 \ ;$

$$f\{f(t)\} = (t^3+1)^3 + 3.$$

**1.4** – $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2^{2x} \ ; \ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{x^2}$.

**1.5** – 1) Dominio di $f$ : $\mathbb{R}$; dominio di $g$ : $x \geq 1$ ; dominio di $f \circ g : x \geq 1$ ; dominio di $g \circ f : \mathbb{R}$.

2) Poichè $E$ è l'intersezione dei domini di $f \circ g$ e $g \circ f$, sono ivi definite entrambe le funzioni e $f \circ g = x, g \circ f = \sqrt{x^2} = x$ in $E$.

**1.6** – Fissato $\overline{x}$ è $\overline{y} = f(\overline{x})$ e $\overline{x} = g(\overline{y})$, e viceversa, da cui $(\overline{x}, \overline{y})$ appartiene al grafico di $f$ se e solo se $(\overline{y}, \overline{x})$ appartiene al grafico di $g$. Quindi il grafico di $g$ è il simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante del grafico di $f$.
Se $f = g$, il grafico deve essere simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

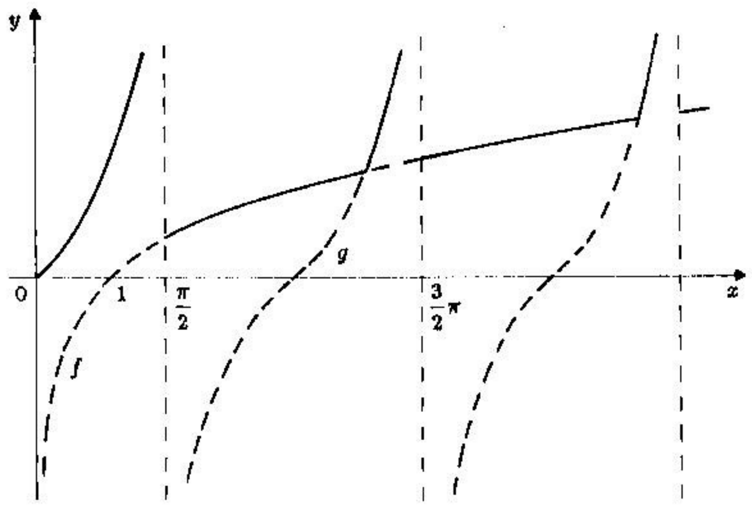
**1.7** – L'iniettività e quindi l'invertibilità di $f$, segue dal fatto che se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$ o $f(x_1) > f(x_2)$.

**1.8** – La prima parte è ovvia;
se $x \in \mathbb{Q}$ $\quad f(f(x)) = f(x) = x$,
se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $\quad f(f(x)) = f(-x) = x$,
poichè anche $\quad -x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

**1.9** – Notando che per ogni $x$ è $0 \le f(x) \le 1$, si ottiene per $n > 1$

$$f^{[n]}(x) = \begin{cases} x^{2n}, & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2}\right)^{2(n-1)}, & \text{per } 1 < x \le 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}, & \text{per } x > 2. \end{cases}$$

**1.10** – $h$ è definita per $x > 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, 1, 2 \ldots$.






**1.11** – Se $u < 0$ $\quad \sup_{x \le u} f(x) = \max_{x \le u} f(x) = 0$,
se $u \ge 0$ $\quad$ e $\quad u \in \mathbb{Q}$ è
$\sup_{x \le u} f(x) = \max_{x \le u} f(x) = u$,
se $u \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\; u \ge 0$, l'asserto segue per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

**1.12** – 1) Il dominio di $f$ è $\mathbb{R} - \{0\}$;
2) $f_1(x) = 1 \quad , \quad f_2(x) = -1$.

**1.13** – 1) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+x}{1-x}$ è l'inversa di $g$.

2) Fissato $h \neq 1$, l'equazione $\frac{2x-1}{2x+1} = h$ ha un'unica soluzione,

cioè $g$ è biiettiva da $\mathbb{R} - \{-1/2\}$ a $\mathbb{R} - \{1\}$, posto $g(-1/2) = 1$ segue l'asserto.

**1.14** – 1) $x_1, x_2 < -1, f(x_1) - f(x_2)$

$$= \frac{2}{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)} \cdot (x_1 - x_2)(1 + x_1 x_2),$$

se $x_1 < x_2$ è $f(x_1) < f(x_2)$, cioè $f$ è crescente in $I_1$; in modo analogo si procede in $I_2$ e $I_3$.

2) Considerata l'equazione $\frac{2x}{1 - x^2} = h$, se $h = 0$ si ha $x = 0$, se $h \neq 0$ è $x^2 + \frac{2}{h}x - 1 = 0$, questa equazione ammette sempre due soluzioni reali $x_1, x_2$ di segno opposto, poichè $x_1 x_2 = -1$, una delle soluzioni è in $I_2$, l'altra è in $I_1$ o $I_3$ in dipendenza dal segno di $h$; quindi

$f(I_1) = \mathbb{R}^+ - \{0\}$ , $f(I_2) = \mathbb{R}$ , $f(I_3) = \mathbb{R}^- - \{0\}$

ed $f$ è biunivoca su ciascun intervallo, quindi ammette inversa.

3) $2\theta = \arcsin\left(\frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}\right)$, $2\theta = \arcsin(\tan 2\theta)$, $\sin 2\theta = \tan 2\theta$ e $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ per la definizione di $\arcsin u$, da cui $\theta = 0$.

∘ **1.15** – Posto $\Delta = ad - bc$, perchè $f$ sia iniettiva deve essere $\Delta \neq 0$. Perchè $f$ sia suriettiva deve essere sempre risolubile per interi il sistema

$$\begin{cases} x' = & ax + by \\ y' = & cx + dy \end{cases}$$

deve quindi essere $\Delta \neq 0$ e devono essere intere per ogni $x', y' \in \mathbb{Z}$ le espressioni $\dfrac{x'd - y'b}{\Delta}, \dfrac{y'a - x'c}{\Delta}$; questo avviene se e solo se $\Delta = \pm 1$.

**1.16** – $f(\underline{x}) \geq \inf\limits_E f(\underline{x}), \quad g(\underline{x}) \leq \sup\limits_E g(\underline{x}),$

quindi $\dfrac{\inf_E f(\underline{x})}{\sup_E g(\underline{x})} \leq \dfrac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})}$
per ogni $\underline{x}$, da cui la prima disuguaglianza; la seconda è ovvia; per la terza si procede in modo analogo.

**1.17** – 1) Non è né pari né dispari;

2) $f(-x) = (-x+1)^2(-x-1)^2(-x-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2 =$
$= f(x)$, funzione pari;

3) non è né pari né dispari;

4) pari;

5) dispari.

**1.18** – 1) $f_1(x) = x^2 + 2, \qquad f_2(x) = 3x,$
$f_1$ è pari, $f_2$ è dispari e $\quad f(x) = f_1(x) + f_2(x)$;

2) $f_1(x) = \cos\dfrac{x}{2}, \qquad f_2(x) = \sin 2x + \tan x.$

3) $f(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) =$
$$= \frac{1}{2}\ln\{(1+x^2)^2 - x^2\} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2+x}{1+x^2-x}.$$

**1.19** – 1) periodo $\pi$; 2) periodo $2\pi$;

3) periodo $\dfrac{1}{2}$; 4) periodo 1;

5) $x - [x]$ è periodica di periodo 1, $\sin x$ è periodica di periodo $2\pi$, $f(x)$ non è periodica in quanto i due periodi sono incommensurabili.



**1.20** – Sia $f$ non costante e sia $T$ il minimo periodo, sia $kT < \omega < (k+1)T \quad f(x + kT) = f(x) = f(x + \omega)$
da cui $\quad f(x + kT) = f(x + kT + (\omega - kT))$
e posto $y = x + kT$ si ottiene $f(y) = f(y + (\omega - kT))$, ma essendo $0 < \omega - kT < T$ si ha l'assurdo.

**1.21** – Vedi I.5.16.

**1.22** – $\sin(\arccos a + 2\arctan b) = \dfrac{1}{1+b^2}\left\{2ab + (1-b^2)\sqrt{1-a^2}\right\}.$

**1.23** – $\arccos x > \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} > 1 - x^2$ per $-1 < x < 1$.

∘ **1.24** – $f(n) = n \cdot f(1)$ per l'additività; $mf(\dfrac{1}{m}) = f(1)$ da cui
$f(\dfrac{1}{m}) = \dfrac{1}{m}f(1)$, quindi per $q \in \mathbb{Q}$ è $f(q) = qf(1)$.
Sia $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $f(1) > 0$,

$$f(x) \geq \sup_{\substack{q\in\mathbb{Q} \\ q<x}} f(q) = xf(1);$$

$$f(x) \leq \inf_{\substack{q\in\mathbb{Q} \\ q>x}} f(q) = xf(1).$$

Se $f(1) < 0$ si procede in modo analogo.

∘∘ **1.25** – $f(1) = (f(1))^2$ da cui $f(1) = 0$ oppure $f(1) = 1$.
Se $f(1) = 0$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}$
$f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) \cdot f(x) = 0.$
Se $f(1) = 1$ allora per VI.1.24 è $\; f(q) = q$ per $q \in \mathbb{Q}$;
se $x > 0$ allora $\quad f(x) = \{f(\sqrt{x})\}^2 > 0$
quindi se $x_1 > x_2$ è
$f(x_1) = f(x_2 + (x_1 - x_2)) = f(x_2) + f(x_1 - x_2) > f(x_2)$, cioè $f$ è strettamente crescente e per VI.1.24. segue l'asserto.

∘ **1.26** – Per VI.1.25 è $f(1) = 0$ oppure $f(1) = 1$.
Nel primo caso $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(z) = f(x + iy) =$
$= f(x) + f(i)f(y) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.
Se $f(1) = 1$ è $f(x) = x$ per $x \in \mathbb{R}$ e $f(z) = f(x + iy) =$
$= f(x) + f(i) \cdot f(y) = x + f(i)y$, ma poichè $f(i) \cdot f(i) = f(i^2) =$
$= f(-1) = -1$ è $f(i) = \pm i$, da cui l'asserto.

**1.27** – 1) $\varphi(nm) = n \cdot m \prod_{p/nm} (1 - \frac{1}{p})$, poichè $n$ ed $m$ sono primi tra loro è

$\varphi(n \cdot m) = n \prod_{p/n} (1 - \frac{1}{p}) \cdot m \prod_{p/m} (1 - \frac{1}{p}) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$. 2) Poichè $n, m$ sono primi tra loro, ogni divisore di $n \cdot m$ si ottiene come prodotto di un divisore di $n$ e di un divisore di $m$, poichè tali prodotti sono distinti è $\mathcal{T}(n \cdot m) = \mathcal{T}(n) \cdot \mathcal{T}(m)$.

3) Segue da 2).

4) Segue da 3).

5) Ovvio.

∘ **1.28** – Siano $u$ il massimo divisore di $k$ composto esclusivamente con fattori primi di $a$ (eventualmente $u = 1$) e $v$ il massimo divisore di $k$ composto esclusivamente con fattori primi di $b$ (eventualmente $v = 1$).

Da $a$ e $b$ primi tra loro segue che $u$ e $v$ sono primi tra loro e, posto $k = u \cdot v \cdot w$, è $w$ primo sia con $u$ che con $v$ (poichè i fattori primi di $w$ non dividono alcuno dei due interi $a$ e $b$).

Inoltre le seguenti coppie sono di numeri primi tra loro :

$(ua, b)$, $(u, vb)$, $(ua, vb)$, $(ua, w)$ $(va, w)$.

In base alla proprietà moltiplicativa si ottiene:

$$\begin{aligned} f(k) \cdot f(kab) &= f(uvw) \cdot f(uvwab) = \\ &= f(u)f(v)f(w)f(ua)f(vb)f(w) = \\ &= f(uvwa)f(uvwb) = f(ka) \cdot f(kb). \end{aligned}$$

## § 2 – Limiti di funzioni

**2.1** – 1) 0 ; 2) $\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} \to \frac{1}{2}$;

3) 1; 4) $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \to 0$; 5) $\frac{5}{2}$;



6) $\sin 3\pi x = 2 \sin \pi x \cos^2 \pi x + \cos 2\pi x \sin \pi x$ da cui $\frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} \to \frac{1}{3}$ per $x \to 1$;

7) $0 \leq \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq x \to 0$; 8) $-\ln 2$ ; 9) 2 ; 10) 1.

**2.2** –

1) 1; 2) $\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \frac{\sqrt[3]{1 + (x-1)} - 1}{\sqrt[4]{1 + (x-1)} - 1} \sim \frac{\frac{1}{3}(x-1)}{\frac{1}{4}(x-1)} = \frac{4}{3}$;

3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{\tan \pi x}{x+2} = \frac{\tan(\pi(x+2))}{x+2} \to \pi$; 5) 1;

6) 2; 7) $\frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{x} \ln \sqrt{1 + \frac{2x}{1-x}} \sim \frac{1}{1-x} \to 1$;

8) $\frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{\ln\left(1 + \frac{x-e}{e}\right)}{x - e} \to \frac{1}{e}$;

9) $\frac{\sin(\sin(\sin x))}{x} \sim \frac{\sin(\sin x)}{x} \sim \frac{\sin x}{x} \to 1$ ; 10) 3;

11) $\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} \cdot \arctan x \sim \frac{1}{|x|} \arctan x \sim \frac{x}{|x|}$,

il limite quindi non esiste; 12) 1.

**2.3** – 1) $\frac{1}{5}$; 2) $-\frac{1}{5}$;

3) $(\cos x)^{x^{-2}} = (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}} \to e^{-\frac{1}{2}}$;

4) $\arcsin \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{3-x}}{x-1} = \arcsin \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}} \to \frac{\pi}{4}$;

5) $\frac{x(e^{(x-1)\ln x} - 1)}{1 - x - \ln x} \sim -\frac{(x-1)\ln x}{(x-1) + \ln x} \to 0$;

6) $1 \leq \frac{1}{x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]} \leq \frac{1}{x(\frac{1}{x} - 1)} \to 1$;

7) $\ln x \cdot \ln(1 + x^2) \sim x^2 \ln x \to 0$;

8) $\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} \to \frac{1}{2}$.

**2.4 –** 1) $\ldots \sim \dfrac{1+\dfrac{3x^4}{5}-1+x}{1+\dfrac{x}{3}-1-\dfrac{x}{2}} \to -6$; 2) 0;

3) $x\left(\arctan\dfrac{x+1}{x+2}-\arctan\dfrac{x}{x+2}\right)=$

$= x\arctan\dfrac{(x+2)}{(x+2)^2+x(x+1)} \to \dfrac{1}{2}$;

4) $+\infty$;

5) $\left(\dfrac{\tan a}{\tan x}\right)^{\tan^{-3}(x-a)} =$

$= \left(1+\dfrac{\tan a-\tan x}{\tan x}\right)^{\left(\frac{1+\tan a-\tan x}{\tan x-\tan a}\right)^3}$,

il limite è $0^+$ se $0<a<\dfrac{\pi}{2}$, $+\infty$ se $\dfrac{\pi}{2}<a<\pi$;

6) $(1-2^x)^{\sin x}=e^{\sin x\ln(1-2^x)}$, $\sin x\ln(1-2^x)\sim x\ln(1-2^x)$, posto $1-2^x=u$ è

$x\ln(1-2^x)=\log_2(1-u)\ln u\sim -u(\ln 2)^{-1}\ln u\to 0$

quindi il limite richiesto è 1;

7) per IV.2.17 è

$$\frac{e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}\right)}{x^4}=\frac{1}{24}+x\sum_{n=5}^{\infty}\frac{x^{n-5}}{n!};$$

poiché per $|x|<\dfrac{1}{2}$ è

$$\left|\sum_{n=5}^{\infty}\frac{x^{n-5}}{n!}\right|\le\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{2^{n-5}n!}\le k,$$

il limite richiesto è $\dfrac{1}{24}$.

**2.5 –** 1) $x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)=x\arctan\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{x}{x}=1$;

2) non esiste poichè

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{e^{\tan x}-1}{e^{\tan x}+1}=1 \quad , \quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{e^{\tan x}-1}{e^{\tan x}+1}=-1.$$



**2.6 –** $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}-3\sin x}{x}\sim\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt2}|x|-3x}{x}$

quindi per $x\to 0^-$ il limite è $-\left(\dfrac{1}{\sqrt2}+3\right)$, per $x\to 0^+$ è $\left(\dfrac{1}{\sqrt2}-3\right)$, per $x\to 0$ non esiste.

**2.7 –**

1) Sia $a>b$, $\left(\dfrac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x=a\left(\dfrac{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/x}}{2}\right)^x\to a$;

2) analogo a 1), il limite è $\min(a,b)$;

3) $x\ln\dfrac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}=x\ln\left(1+\dfrac{a^{1/x}-1}{2}+\dfrac{b^{1/x}-1}{2}\right)\sim$

$\sim\dfrac{x}{2}\left(a^{1/x}-1+b^{1/x}-1\right)\sim\dfrac{1}{2}\ln(ab)$,

quindi il limite è $\sqrt{ab}$;

4) $\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=a^{\alpha-\beta}\dfrac{(1+\frac{x-a}{a})^\alpha-1}{(1+\frac{x-a}{a})^\beta-1}\to\dfrac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$.

**2.8 –** 1) $\dfrac{1}{x}e^{(1-x^2)\ln x}=e^{-x^2\ln x}\to 1$;

2) $\ldots\sim\dfrac{x}{\dfrac{x^2}{(1+x)\ln(1+x)}}\sim(1+x)\to 1$;

3) se $2k\le x<2k+1$, $\left(1+(-1)^{[x]}\sin\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{\pi}{2}>\dfrac{\pi}{2}$, quindi

$\left[\cos\{(\ldots)\cdot\dfrac{\pi}{2}\}\right]=-1$; se $2k+1\le x<2(k+1)$ è

$\left[\cos\{(\ldots)\cdot\dfrac{\pi}{2}\}\right]=0$;

di conseguenza il limite non esiste.

**2.9 –** $x^2\left(\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}-a-\dfrac{b}{x}-\dfrac{c}{x^2}\right)\sim$

$\sim x^2\left(1-a-\dfrac{b}{x}-\dfrac{1+c}{x^2}+\dfrac{7}{2x^3}+\dfrac{1}{2x^4}\right)$

quindi devono essere $a=1$, $b=0$, $c=-1$.

**2.10 –** $f(x) \sim \dfrac{1}{3(1-x^2)} \sin \dfrac{1}{x^m}$ , $g(x) \sim \dfrac{1}{3}$ da cui: se $m < 0$ è $f(x) = o(g(x))$ e $f(x) = O(g(x))$ ; se $m = 0$ $f(x) \asymp g(x)$ e $f(x) = O(g(x))$ ,se $m > 0$ $f(x) = O(g(x))$.

**2.11 –** $|f(x)| < K$ per $x > H$;

$$\ln(x + f(x)) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right) \sim \ln x + \frac{f(x)}{x} \sim \ln x .$$

**2.12 –** $\ln f(x) = \ln\left\{g(x) \cdot \dfrac{f(x)}{g(x)}\right\} = \ln g(x) + \ln \dfrac{f(x)}{g(x)} \sim \ln g(x)$ poichè per le ipotesi fatte $\ln g(x)$ si mantiene discosto dallo zero.

**2.13 –** La classe limite è l'intervallo $[-1,1]$, infatti fissato $\alpha \in [-1,1]$, posto $x_k = \arcsin\alpha + 2k\pi, k = 0,1,2,\dots$ è

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k}{1+x_k} \sin x_k = \alpha.$$

$\circ$ **2.14 –** La classe limite è $[1,+\infty]$, infatti sia $\alpha \geq 1$ e si consideri la successione $\{x_k\} = \left\{2k\pi + (2k\pi)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right\}, x_k \to +\infty$ per $k \to +\infty$ e si ha $x_k \sin x_k \sim (2k\pi)^{1/\alpha} \to +\infty$, da cui per VI.2.12 è

$$\frac{\ln x_k}{\ln(1 + |x_k \sin x_k|)} \sim \frac{\ln x_k}{\frac{1}{\alpha}\ln(2k\pi)} \to \alpha;$$

poichè $+\infty$ è punto di accumulazione di valori limite, appartiene alla classe limite.

**2.15 –** Detto $L = \limsup_{x\to x_o} g(x)$, esiste una successione $\{x_n\}$ con $x_n \to x_o$ e $g(x_n) \to L$ per $n \to +\infty$, allora $f(x_n)g(x_n) \to a \cdot L$, cioè $\limsup_{x\to x_o} f(x)g(x) \geq aL$;
supponiamo $\limsup_{x\to x_o}(f(x)g(x) = \Lambda > a \cdot L$,
esiste $\{y_n\}$ con $y_n \to x_o$ e $f(y_n)g(y_n) \to \Lambda$ per $n \to +\infty$,
ma allora sarebbe $g(y_n) \to \dfrac{\Lambda}{a} > L$ , assurdo, da cui l'asserto.



$\circ$ **2.16 –** Da $h + n(a-\varepsilon) < f(x+n) < k + n(a+\varepsilon)$ per $\overline{x} \leq x \leq \overline{x}+1$ si ha che per $x > \overline{x}$ è

$$\frac{h + [x-\overline{x}](a-\varepsilon)}{x} < \frac{f(x)}{x} < \frac{k + ([x-\overline{x}]+1)(a+\varepsilon)}{x},$$

passando al limite si ha $a - \varepsilon \leq \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \leq a + \varepsilon$, per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ si ha l'asserto.
Supponiamo $f(x+1) - f(x) \to +\infty$; fissato $K > 0$ per $x$ abbastanza grande si ricava come nel caso precedente che $\dfrac{f(x)}{x} \geq \dfrac{h + 2K[x-\overline{x}]}{x}$, da cui $\dfrac{f(x)}{x} > K$ definitivamente.

$\circ$ **2.17 –** $\lim_{t\to o} \dfrac{\sin^2(n!\pi x)}{\sin^2(n!\pi x) + t^2}$ è 0 se $n!\pi x = k\pi$, altrimenti è 1;
allora se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, n!x \neq k$ per ogni $n$, quindi $f(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$, per $n$ abbastanza grande è $n!x \in \mathbb{Z}$, da cui $f(x) = 0$.

$\circ\circ$ **2.18 –** Poichè $f(x) \to l(a)$ per $x \to a$, si ha $|f(x) - f(y)| < \dfrac{1}{m}$ per $x, y$ in un intorno di $a$; per ogni $x \neq a$ di questo intorno è quindi $|f(x) - l(x)| \leq \dfrac{1}{m}$, allora ad ogni elemento di $E_m$ si può associare un intorno non contenente altri punti di $E_m$, si possono scegliere questi intorni in modo che siano disgiunti, a ciascuno di essi si associa un razionale contenuto, da cui $E_m$ risulta al più numerabile. Poichè $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ si ha l'asserto.

$\circ$ **2.19 –** Poichè $a_i \to o$ per $i \to +\infty$, è definitivamente $a_i^{1/x} \leq a_i$ per $0 < x \leq 1$ quindi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{1/x}$ è convergente.

Sia $A = \max_i a_i$ è ovviamente $\lim_{x\to0^+} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{1/x}\right)^x \geq A$ ;

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{1/x}\right)^x = A\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{a_i}{A})^{1/x}\right)^x \leq A\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{A}\right)^x \to A$$

per $x \to 0^+$, da cui l'asserto.

**2.20 –** 1) Poichè $A(x)$ è costante nei tratti $[t_n, t_{n+1})$, segue l'asserto;
2) $A(x; n^3) = n$ per $n^3 \leq x < (n+1)^3$; $A(x; \ln n) = n$ per $\ln n \leq x < \ln(n+1)$.

**2.21** – Evidente.

**2.22** – 1) $\dfrac{A(x;t_n)}{x} - \dfrac{A(t_{n_0};t_n)}{x} = \dfrac{A(x;v_k)}{x} - \dfrac{A(v_{k_0};v_k)}{x}$
da cui l'asserto.
2) $\dfrac{A(x;t_n)}{x} \le \dfrac{A(x;w_r)}{x} \le \dfrac{A(x;t_n)}{x} + \dfrac{A(x;z_s)}{x}$
per VI.2.20, da cui l'asserto.

**2.23** – 1) $A(x) \le \dfrac{x}{a} + 1 \ , \ \dfrac{A(x)}{x} \le \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x}$,
segue l'asserto;
2) $A(x) \ge \dfrac{x}{b} + 1 \ , \ \dfrac{A(x)}{x} \ge \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{x}$,
segue l'asserto;
3) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_o(\varepsilon)$ tale che per $x \ge x_o = t_{n_{o(\varepsilon)}}$ risulta $t_{n+1} - t_n > \alpha - \varepsilon$;
per 1) si ottiene $\overline{D}(t_n) \le \dfrac{1}{\alpha - \varepsilon}$ e per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ segue l'asserto;
4) si procede come in 3);
5), 6), 7), 8) sono conseguenze immediate delle precedenti.

∘∘ **2.24** – Si osservi che è

$$A(p_{r+1}) - A(p_r) = (p_{r+1} - p_r)\cdot\frac{k}{a} + \theta_r \cdot k$$

con $|\theta_r| < 1$, quindi se $p_{2m} \le x < p_{2m+1}$ è

$$A^\circ(x) = R_{m-1}\cdot\frac{k}{a} + (x - p_{2m})\cdot\frac{k}{a} + \theta k,$$

ove $\theta = \theta_o + \theta_1 + \ldots + \theta_{m-1} + \theta'_m$ e quindi $|\theta| < m+1$, inoltre è

$$A(x) = (R_{m-1} + S_{m-1})\cdot\frac{k}{a} + (x - p_{2m})\cdot\frac{k}{a} + \overline{\theta}k,$$

con $|\overline{\theta}| < 1$.

Se $p_{2m+1} \le x < p_{2m+2}$, è $A^\circ(x) = R_m \cdot \dfrac{k}{a} + \hat{\theta}\cdot k$ con $|\hat{\theta}_1| < m+1$ e

$$A(x) = (R_m + S_{m-1})\cdot\frac{k}{a} + (x - p_{2m+1})\cdot\frac{k}{a} + \theta_1 k$$

con $|\theta_1| < 1$.

Nei due casi precedenti è rispettivamente

$$x = R_{m-1} + S_{m-1} + (x - p_{2m}) \quad \text{e}$$

$$x = R_m + S_{m-1} + (x - p_{2m+1}).$$

Per $x \in I$ sia $m(x)$ tale che $p_{2m(x)} \le x < p_{2m(x)+1}$, per ipotesi è allora $m = o(x)$ per $x \to +\infty$, $m = o(R_{m-1} + S_{m-1})$ per $m \to +\infty$, $x - p_{2m} = o(p_{2m})$.
In tal caso per $x \in I$ è

$$\frac{A^\circ(x)}{x} = \frac{k}{a}\cdot\frac{R_{m-1} + o(R_{m-1} + S_{m-1})}{(R_{m-1} + S_{m-1})(1 + o(1))}.$$

In modo analogo si trova che per $x \in J$ è

$$\frac{A^\circ(x)}{x} = \frac{k}{a}\cdot\frac{R_m + o(x)}{R_m + S_{m-1} + o(R_m + S_{m-1})}.$$

Pertanto, quando esiste il limite di $R_m/S_m$ ed è $0, \gamma, +\infty$ si ha rispettivamente

$$D(v_q) = 0 \ , \ \frac{k}{a}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+1} \ , \ \frac{k}{a}.$$

Capitolo VII

# CONTINUITÀ

## § 1 – Continuità delle funzioni

**1.1** – 1) Fissato $\varepsilon > 0$, per $|x| < \delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ è

$|f(x) - f(0)| = |3x^2 + x| \leq 3x^2 + |x| \leq 3\delta^2 + \delta \leq 4\delta \leq \varepsilon.$

2) $$|f(x) - f(1)| = |(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 3(x-1)| \leq$$
$$\leq |x-1|^3 + 3|x-1|^2 + 3|x-1|$$

quindi fissato $\varepsilon > 0$ se $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{7}\right)$ è $|f(x) - f(1)| < 7\delta \leq \varepsilon$.

3) $|f(x) - f(0)| = \left|\frac{23x}{6x-4}\right|$, fissato $\varepsilon > 0$ se $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{23}\right)$

per $|x| < \delta$ si ha $\left|\frac{23x}{6x-4}\right| \leq |23x| < 23\delta \leq \varepsilon$.

**1.2** – Basta porre $f(1) = 2$.

**1.3** – Nessuna delle funzioni in questione è prolungabile con continuità.

**1.4** – La 1) e la 2) non sono prolungabili.
La 3) è prolungabile ponendo $f(0) = 0$.

**1.5** – Poichè in ogni intorno di un punto razionale (irrazionale) vi sono punti irrazionali (razionali), segue l'asserto.

**1.6** – $\sin\frac{1}{P(x)}$ è continua in ogni punto $x$ per cui $P(x) \neq 0$; quindi se $grP = n$ vi sono al più $n$ punti di discontinuità di seconda specie.

**1.7** – In ogni intervallo $[n, n+1)$ , $n \in \mathbb{Z}$ , $f(x) = n + \sqrt{x-n}$ e quindi è continua; inoltre poichè

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} (n-1) + \sqrt{x-(n-1)} = n = f(n),$$

$f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.
Poichè $f(x)$ è monotona in ogni intervallo $[n, n+1)$, segue che è monotona su $\mathbb{R}$.

**1.8** – Se fosse $f(a) \neq 0$ , $f(x)$ avrebbe per $x \to a$ definitivamente il segno di $f(a)$, assurdo.

**1.9** – Poichè $-2\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$ e $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, deve essere $a + b = 0$ e $b - a = 2$, da cui $a = -1$ , $b = 1$.

**1.10** – 1) Perchè sia $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ deve essere $a > 0$, perchè sia $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ deve essere $b > -1$, essendo $\arctan x \sim x$.
2) $f(x)$ con $a > 0$ e $b < -1$ può essere prolungata con continuità sul compatto $-1 \le x \le 1$ e quindi è uniformemente continua (Teorema di Cantor–Heine).
3) Poichè $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$ e $f(x) \geq 0$ per $0 < x < 1$, segue l'asserto.

**1.11** – 1) $f(x)$ è continua su $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ e per $x = 0$; per $x \in \mathbb{Z} - \{0\}$ $f(x)$ presenta discontinuità eliminabili; $f$ non è né iniettiva né suriettiva.
2) Osservando i diagrammi delle funzioni $x$ e $\dfrac{1}{x}$ si ha che $g(x)$ è continua per $x = \pm 1$; $g$ è iniettiva e suriettiva in quanto $h(x) = x$ è iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $k(x) = \dfrac{1}{x}$ è inettiva e suriettiva da $\mathbb{Q} - \{0\}$ a $\mathbb{Q} - \{0\}$.

∘∘ **1.12** – Per $x \in \mathbb{Q}^+ - \{0\}$, $f(x)$ è discontinua; sia $x_\circ \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$, fissato $\varepsilon > 0$ sia $q$ tale che $\dfrac{1}{q} \geq \varepsilon$, tali $q$ sono in numero finito, quindi in ogni intervallo $(x_\circ - \eta, x_\circ + \eta)$ vi è solo un numero finito di razionali $x$ per cui $f(x) \geq \varepsilon$, vi è quindi un intorno di $x_\circ$ che non contiene alcuno di questi punti, ed in tale intorno $f(x) < \varepsilon$, ne segue la continuità di $f(x)$ in $x_\circ$ e quindi su $\mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$.
$f(x)$ non è né iniettiva né suriettiva.



**1.13** – 
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } |x| < 1, \\ 0 & \text{per } x = \pm 1, \\ 1 & \text{per } |x| > 1, \end{cases} \quad \text{quindi } f \text{ ha discontinuità}$$
di prima specie in $x = \pm 1$.

∘ **1.14** – Se $x_2 > x_1$ è

$$0 \le g(x_2) - g(x_1) = \sup_{a\le t\le x_2} f(t) - g(x_1) =$$
$$= \max\{\sup_{x_1\le t\le x_2} f(t) - g(x_1), 0\} \le$$
$$\le \max\{\sup_{x_1\le t\le x_2} f(t) - f(x_1), 0\}.$$

Poichè, per la continuità di $f$, quest'ultimo termine tende a 0 per $x_2 \to x_1$, segue l'asserto.

**1.15** – Il massimo, che esiste poichè $f$ è continua, viene raggiunto in uno degli estremi. Se $f$ è costante è ovvio; sia $f$ non costante ed $\alpha$ il punto di massimo con $a < \alpha < b$, esistono $x_1, x_2$ con $x_1 < \alpha < x_2$ e $f(x_1) = f(x_2) < f(\alpha)$, ma allora poichè $\alpha = \bar{t}x_1 + (1-\bar{t})x_2, 0 < \bar{t} < 1$, è
$f(\alpha) \le \bar{t}f(x_1) + (1-\bar{t})f(x_2) = f(x_2)$ assurdo.

**1.16** – 1) Ovvio;
2) sia $k = \max\limits_{\varepsilon\le|x|\le M} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$, allora $k < 1$ e $|f(x)| \le k|x|$ per $x$ tale che $\varepsilon < |x| < M$.

**1.17** – $f(x) = \sqrt{x}$, fissato $\varepsilon > 0$ si verifica che se $|h| < \varepsilon^2$ è $|\sqrt{x-h} - \sqrt{x}| < \varepsilon$. $g(x) = x^2$, fissato $\varepsilon > 0$ si verifica che se
$0 \le |h| < \sqrt{a^2+\varepsilon} - a = \delta_a$ è $|(x+h)^2 - x^2| < \varepsilon$ in (0,a) per ogni $a$ finito, quindi $g$ è uniformemente continua su $(0, a)$;
poichè $\delta_a \to 0$ per $a \to +\infty$, $g$ non è uniformemente continua su $(0, +\infty)$.

○ **1.18** – Per il teorema di Heine–Cantor $f$ è uniformemente continua nella sfera di raggio $2R$, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon) < R$ tale che per $\underline{x}, \underline{y}$ con $\|\underline{x}\| < 2R, \|\underline{y}\| < 2R$ e $\|\underline{x} - \underline{y}\| < \delta$ è $\|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| < \varepsilon$; tenendo presente il suggerimento segue l'asserto.

○ **1.19** – Ad ogni $\varepsilon > 0$ coordiniamo $R > 0$ tale che per $\|\underline{x}\| > R$ si abbia $\|f(\underline{x}) - g(\underline{x})\| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Per il teorema di Heine–Cantor $g$ è uniformemente continua per $\|\underline{x}\| \leq 2R$, quindi esiste $\delta_1 > 0$ tale che se $\|\underline{x}_1\| \leq 2R$, $\|\underline{x}_2\| \leq 2R$, $\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\| < \delta$ allora $\|g(\underline{x}_1) - g(\underline{x}_2)\| < \varepsilon$.
Per l'ipotesi su $f$ esiste $\delta_2 > 0$ tale che se $\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\| < \delta_2$ allora $\|g(\underline{x}_1) - g(\underline{x}_2)\| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Posto $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, R)$, siano $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ con $\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\| < \delta$.
Se uno dei due punti $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ ha norma minore o uguale a $R$ allora entrambi hanno norma minore o uguale a $2R$ per cui $\|g(\underline{x}_1) - g(\underline{x}_2)\| < \varepsilon$.
Se entrambi hanno norma maggiore di $R$,
$\|g(\underline{x}_1) - g(\underline{x}_2)\| \leq \|g(\underline{x}_1) - f(\underline{x}_1)\| + \|f(\underline{x}_1) - f(\underline{x}_2)\| +$
$+ \|f(\underline{x}_2) - g(\underline{x}_2)\| < \varepsilon$.

**1.20** – 1) Una $\tilde{f}$ come richiesto ha, per esempio, per diagramma quello ottenuto da quello di $f$ raccordando i punti $(2k+1, 2^k)$ e $(2k+2, 2^{k+1})$ mediante segmenti di retta.

2) La risposta è negativa. Infatti sia $\tilde{f}$ un qualsiasi prolungamento continuo di $f$ e si fissi $\varepsilon = 1$; per ogni $\delta > 0$ sia $\overline{k} = \overline{k}(\delta)$ tale che $(2^{\overline{k}} - 1)\delta < 1 \leq 2^{\overline{k}}\delta$, consideriamo nell'intervallo $I_{\overline{k}}$ i punti $x_h = (2\overline{k} + 1) + h\delta, h = 0, 1, \ldots, 2^{\overline{k}} - 1$ ed il punto $x_{2^{\overline{k}}} = 2\overline{k} + 2$.
Poichè
$$\tilde{f}(2\overline{k} + 2) - \tilde{k}(2\overline{k} + 1) = \sum_{h=0}^{2^{\overline{k}}-1} \{\tilde{f}(x_{h+1}) - \tilde{f}(x_h)\} = 2^{\overline{k}},$$
almeno un termine della somma deve essere maggiore o uguale ad 1.



## § 2 – Proprietà delle funzioni continue in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$.

**2.1** – $f(x) = x^5 - 3x - 1$ , $f(1) = -3$ , $f(2) = 25$, poichè $f$ è continua esiste $a$ con $1 < a < 2$ e $f(a) = 0$.

**2.2** – Poichè $\lim_{x \to +\infty} P(x) = -\lim_{x \to -\infty} P(x) \neq 0$ e $P(x)$ è continua, segue l'asserto.

**2.3** – $F(a) \geq 0$ e $F(b) \leq 0$ da cui, per la continuità di $F$, segue l'asserto.

**2.4** – 1) Se $u_1 = f(u_\circ) \geq u_\circ$ allora $\{u_n\}$ è monotona non decrescente essendo $f$ crescente, altrimenti $\{u_n\}$ è monotona non crescente;
se $u_n \to u$ per $n \to +\infty$ è $f(u_n) \to f(u)$ poichè $f$ è continua, da cui $u = f(u)$ poichè $u_n = f(u_{n-1})$.
2) Sia $u_1 = f(u_\circ) \geq u_\circ$ e sia $u_2 = f(u_1) \leq u_\circ$, allora è $u_3 = f(u_2) \leq f(u_\circ) = u_1$ , $u_4 = f(u_3) \leq f(u_1) = u_2$ e così via.
Nelle altre situazioni iniziali si procede in modo analogo. Poichè $u_{2k} = f^{[2]}(u_{2k-2})$ e $u_{2k+1} = f^{[2]}(u_{2k-1})$, la continuità di $f$ implica l'asserto.

**2.5** – Se $f$ non è continua in $c \in [a, b]$, ivi una discontinuità di prima specie; assurdo dovendo assumere tutti i valori tra $f(a)$ ed $f(b)$.

**2.6** – Se $f$ è strettamente monotona, per VI.1.7 è invertibile e la sua inversa è monotona. Poichè $f^{-1}$ assume tutti i valori fra $a$ e $b$, per VII.2.5. è continua.
Sia ora $f$ invertibile. Se $f$ non fosse monotona, esisterebbero $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2 < x_3$ tali che, per esempio, è $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_3) < f(x_2)$.

Allora se $\delta \in [\max(f(x_1), f(x_3)), f(x_2))$, per la continuità di $f$ esistono almeno due punti $x_\delta, y_\delta$ con $x_1 \leq x_\delta < x_2 < y_\delta \leq x_3$ e $f(x_\delta) = f(y_\delta) = \delta$; $f$ non è quindi iniettiva; assurdo.

**2.7** – $F_n(x)$ non può avere sempre lo stesso segno, infatti se fosse $F_n(x) > 0$ sarebbe $f(0) > f(1/n) > \ldots > f(1)$ assurdo.
Allora esiste $x_n \in [0, 1 - 1/n]$ ove
$F_n(x_n) = f(x_n) - f(x_n + 1/n) = 0$.

**2.8** – Sia $[a', b'] \subset (a,b), f \in C([a', b'])$ quindi deve ammettere un massimo, poichè ogni punto è di minimo relativo $f$ deve essere costante su $[a', b']$.
Per la continuità di $f$ e l'arbitrarietà di $[a', b']$ segue l'asserto.

∘∘ **2.9** – Se $f(x_1) \neq f(x_2)$ le due coppie $(p_1, q_1)$ e $(p_2, q_2)$ non sono eguali, infatti sia $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$, deve essere
$p_1 < x_1 < p_2$ per come sono costruite le coppie, se
$f(x_1) > f(x_2)$ è $q_1 \neq q_2$.
Se $f(x_1) = f(x_2)$ le coppie associate possono coincidere. Poichè le coppie di razionali sono numerabili, ne segue che i valori distinti di $f(x)$ sono al più numerabili.
La seguente funzione mostra come possono essere effettivamente assunti una infinità numerabile di valori: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ così definita:
$$f(x) = \frac{1}{n} \quad \text{se} \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}\ , \ f(0) = 0.$$

∘ **2.10** – Fissati $x_\circ \in (a,b)$ e $h > 0$ tali che $x_\circ - h \in (a,b), x_\circ + h \in (a,b)$, è
$(1+\theta)f(x_\circ) - \theta f(x_\circ - h) \leq f(x_\circ + \theta h) \leq \theta f(x_\circ + h) + (1-\theta) f(x_\circ)$
per $0 < \theta < 1$, da cui per $\theta \to 0^+$ è $f(x_\circ + \theta h) \to f(x_\circ)$, cioè $f$ è continua dalla destra in $x_\circ$. In modo analogo si mostra che $f$ è continua dalla sinistra.

**2.11** – Per l'uniforme continuità esiste $\delta > 0$ tale che per
$|x_1 - x_2| < \delta, \quad x_1, x_2 \in E$, è $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$.
Poichè $E$ è limitato esiste un numero finito di punti di $E$, siano $\{x_k\}, k = 0, \ldots, n$, tali che per ogni $x \in E$ è $\inf_k |x - x_k| < \delta$, allora $|f(x)| \leq \sup_k |f(x_k)| + 1$.



Considerando $f(x) = x$ si ha la seconda parte.

∘ **2.12** – 1) Sia , ad esmpio, $\beta = \max_{x \in [-1,1]} |f(x)|$, per l'uniforme continuità di $f$ esiste $\delta > 0$ tale che per $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $|x_1 - x_2| < \delta$ è $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$. Sia $\alpha = \max(1, 1/\delta)$, mostriamo che $|f(x)| \leq \alpha|x| + \beta$: per induzione mostriamo che, ad esempio per $x > 0$, vale la relazione
$|f(x)| \leq \alpha(1 + n\delta) + \beta$ per $1 + n\delta \leq x \leq 1 + (n+1)\delta$.
Per $n = 0$ è ovvia, supponiamola vera per $n - 1$ e dimostriamola per $n$ :
$|f(x)| \leq |f(x - \delta)| + 1 \leq \beta + \alpha(1 + (n-1)\delta) + 1 \leq \alpha(1 + n\delta) + \beta$
essendo $1 \leq \alpha\delta$; poichè nell'intervallo considerato è
$\beta + \alpha(1 + n\delta) \leq \beta + \alpha|x|$ segue l'asserto per $x > 0$.
2) Usare VII.1.18.

**2.13** – Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per $x_1, x_2 \in [a,b]$ e $|x_1 - x_2| < \delta$ sia $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$; sia $N$ tale che $\dfrac{b-a}{N} < \delta$, allora
$$g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{E_k} \cdot f\left(a + \frac{k}{N}\right), \quad \text{ove} \quad E_k = \left[a + \frac{k}{N}, a + \frac{k+1}{N}\right],$$
è la funzione richiesta.

**2.14** – $E^C = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k)$ con $\alpha_k < \beta_k$ (vedi V.1.13), posto, su
$(\alpha_k, \beta_k)$, $g(x) = f(\alpha_k) + \dfrac{f(\alpha_k) - f(\beta_k)}{\alpha_k - \beta_k}(x - \alpha_k)$,
si ha il prolungamento richiesto (prolungamento per linearità).

∘ **2.15** – Sia $x, y \in E$ con $x < y$, siano $(p_1, r_1)$ e $(p_2, r_2)$ associate rispettivamente ad $x$ e $y$.
Se $\lim_{t \to x^+} f(t) \leq \lim_{t \to y^-} f(t)$ oppure
se $\lim_{t \to x^-} f(t) \geq \lim_{t \to y^+} f(t)$ allora
sia $p_1 \neq p_2$, altrimenti sia $p_1 = p_2$; poichè nell'intervallo $(x, y)$ $f(t)$ non può essere sempre inferiore a $p_1$, è $r_1 < r_2$.
Essendo le coppie $(p, r)$ numerabili ne segue che $E$ è al più numerabile. In modo analogo si procede nell'altro caso.

**2.16** – $$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{per} \quad x \in \mathbb{R} - S \\ 1 & \text{per} \quad x \in \mathbb{Q} \cap S \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

**2.17** – Sia $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, sia $\{x_k\} \subset \mathbb{Q}$ con $x_k \to x$; se $f$ è continua è $f(x) = \lim\limits_{k \to +\infty} f(x_k)$.
I valori su $\mathbb{Q}$ non possono essere assegnati arbitrariamente perchè $f(x_k)$ deve essere convergente.

**2.18** – Per $x \in \mathbb{Q}$ da VI.1.24 segue che $f(x) = x \cdot f(1)$, per la continuità di $f$ e per VII.2.17 è $f(x) = x \cdot f(1)$ per $x \in \mathbb{R}$.

**2.19** – Se $f$ non è identicamente nulla è $f(0) = 1$;
$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ per ogni $x$;
$f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$; posto $f(1) = a$ è $f(m) = a^m, m \in \mathbb{Z}$;
$\underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) \dots f\left(\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ volte}} = f(1) = a$ da cui
$f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{1/n}$; $f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{m/n}$; per VII.2.17 è quindi $f(x) = a^x$.

**2.20** – Se $ka < x < (k+1)a$, $k \in \mathbb{N}$, è $f_a(x) = x - ka$;
$f_a(x_1) = f_a(x_2)$ implica $x_1 - x_2 = (k_1 - k_2)a$ e poichè $a \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$ ciò è assurdo se $k_1 \neq k_2$; sia $x_\circ \in \mathbb{Q}^+ - \{0\}$, $ka < x_\circ < (k+1)a$ e $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}^+$ con $x_n \to x_\circ$, allora è definitivamente $ka < x_n < (k+1)a$ e quindi $f_a(x_n) \to f_a(x_\circ)$, cioè $f_a$ è continua; che $f_a(\mathbb{Q}^+ - \{0\})$ sia denso in $[0, a]$ è ovvio.



## § 3 – Continuità in spazi più generali (metrici, topologici)

**3.1** – 1) Sia $\mathcal{U}(\underline{x} + \underline{y}; \delta)$ un intorno circolare di $\underline{x} + \underline{y}$ di raggio $\delta$,
$$\mathcal{V}(\underline{x}, \underline{y}) = \mathcal{U}(\underline{x}; \delta/2) \times \mathcal{U}(\underline{y}; \delta/2)$$
è tale che $f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}(\underline{x} + \underline{y}; \delta)$.
2) $(\underline{x}|\underline{y}) = (\underline{x} - \underline{x}_\circ + x_0|\underline{y} - \underline{y}_\circ + \underline{y}_\circ) = (\underline{x}_\circ|\underline{y}_\circ) + (\underline{x} - \underline{x}_\circ|\underline{y} - \underline{y}_\circ) + (\underline{x}_\circ|\underline{y} - \underline{y}_\circ) + (\underline{x} - \underline{x}_\circ|\underline{y})$,
$|(\underline{x}|\underline{y}) - (\underline{x}_\circ|\underline{y}_\circ)| \leq \|\underline{x} - \underline{x}_\circ\| \cdot \|\underline{y} - \underline{y}_\circ\| + \|\underline{x}_\circ\| \cdot \|\underline{y} - \underline{y}_\circ\| + \|\underline{y}_\circ\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_\circ\|$,
fissato $\varepsilon < 0$, se $\delta = \dfrac{1}{3} \min\left(\sqrt{\varepsilon}, \dfrac{\varepsilon}{\|\underline{y}_\circ\|}, \dfrac{\varepsilon}{\|\underline{x}_\circ\|}\right)$,
per ogni $(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathcal{V}(\underline{x}_\circ, \underline{y}_\circ)$ ove $\mathcal{V}(\underline{x}_\circ, \underline{y}_\circ) = \mathcal{U}(\underline{x}_\circ; \delta) \times \mathcal{U}(\underline{y}_\circ; \delta)$ è $|(\underline{x}|\underline{y}) + (\underline{x}_\circ|\underline{y}_\circ)| < \varepsilon$.
3) Analogo a 2).

**3.2** – $f^{-1}(E) = f^{-1}[(E^C)^C] = [f^{-1}(E^C)]^C$
$E^C$ è aperto e $f^{-1}(E^C)$ è aperto essendo $f$ continua, da cui l'asserto.

**3.3** – Vedi VII.3.2.

**3.4** – L'aperto $(-1, 2)$, poichè contiene il punto di minimo, viene portato in un insieme non aperto.
Il chiuso $(-\infty, -1]$ viene portato in un insieme semiaperto.

**3.5** – $s_E(x) = \inf\limits_{y \in E} d(x, y) \leq \inf\limits_{y \in E} (d(x, x_\circ) + d(x_\circ, y)) = d(x, x_\circ) + s_E(x_\circ)$
da cui $|s_E(x) - s_E(x_\circ)| \leq d(x, x_\circ)$, da cui l'asserto.

**3.6** – Poichè il denominatore è sempre diverso da 0, da VII.3.5 segue l'asserto.

**3.7** – Sia, ad esempio, $f(x_1) \geq f(x_2), f(x_3) \geq f(x_2)$, allora per la continuità di $f$ esistono $a, b$ con

$x_1 \leq a \leq x_2 \leq b \leq x_3$ e $f(a) = f(b) \geq f(x_2)$,

tra $a$ e $b$ vi è quindi un minimo, se segue che l'immagine di $(a, b)$ non è aperta.

**3.8** – Supponiamo, per assurdo, che esista $\mathcal{U}(y_\circ)$ tale che $\mathcal{U}(y_\circ) \cap f(A) = \emptyset$, poichè $f$ è suriettiva esiste $x_\circ \in X$ tale che $f(x_\circ) = y_\circ$, per la continuità di $f$ esiste $\mathcal{V}(x_\circ)$ tale che $f(\mathcal{V}(x_\circ)) \subset \mathcal{U}(y_\circ)$ e poichè $\mathcal{V}(x_\circ) \cap A \neq \emptyset$ è $f(A) \cap \mathcal{U}(y_0) \neq \emptyset$, assurdo.

**3.9** – Sia $\hat{x} \in X - T$ ed $x_n \to \hat{x}$ per $n \to +\infty$, con $x_n \in T$ per $n = 1, 2, \ldots$; per la continuità di $f$ e di $g$ è

$$f(\hat{x}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(\hat{x}).$$

**3.10** – 1) $2 \cdot f(0) = 2f^2(0)$ da cui $f(0) = 0$ oppure $f(0) = 1$, ma se fosse $f(0) = 0$ sarebbe, per ogni $x, 2 \cdot f(x) = 0$;
$f(x) + f(-x) = 2f(x)$ da cui $f(x) = f(-x)$.

2) $f(0) + f(\alpha) = 2f^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ da cui

$$f\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \pm\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right);$$

$f(2\alpha) = 2f^2(\alpha) - 1 = \cos 2\alpha$ , $f(\alpha) + f(3\alpha) = 2 \cdot f(2\alpha) \cdot f(\alpha)$ da cui $f(3\alpha) = \cos\alpha\{2\cos 2\alpha - 1\} = \cos 3\alpha$, procedendo in modo analogo si ha $f(n\alpha) = \cos n\alpha$.

Se $f(x)$ è positiva per $|x| < \frac{1}{2}\pi$ è uguale a $\cos x$ per

$x = \frac{k\alpha}{2^h}, k \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{N}$, con $-\frac{1}{2}\pi < \frac{k\alpha}{2^h} < \frac{1}{2}\pi$; essendo l'insieme di questi punti denso in $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$, se $f$ è continua è $f(x) = \cos x$ (vedi VII.3.9).

**3.11** – Sia $F \subset X$ chiuso, allora $F$ è compatto e $f(F)$ è compatto e quindi chiuso in $Y$, allora per VII.3.2 $f^{-1}$ è continua.



**3.12** – Siano $d_1$ e $d_2$ le metriche in $X$ e $Y$ e sia $\mathcal{U}(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$.
Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in X$ si può coordinare $\delta(x) > 0$ tale che se $y \in \mathcal{U}(x; 2\delta(x))$ è $d_2(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Consideriamo la copertura di $X$ costituita dalla collezione di aperti $\mathcal{U}(x; \delta(x))$; per la compattezza di $X$ sia $\mathcal{U}(x_1; \delta(x_1)), \ldots \mathcal{U}(x_n; \delta(x_n))$ una sottocopertura finita.
Posto $\delta = \min_{1\leq i\leq n} \delta(x_i)$ si ha che se $d_1(x, y) < \delta$ è $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$, infatti se $d_1(x, y) < \delta$ esiste $x_k, 1 \leq k \leq n$, tale che $x, y \in \mathcal{U}(x_k; \delta(x_k))$.

∘ **3.13** – Se $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sia $\|\underline{x}\|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$; mostriamo che ogni norma è equivalente a $\|\cdot\|_S$.
Sia $\underline{e}^k = (0, 0, \ldots 1, 0, \ldots, 0)$ e sia $M = \max_{1\leq k\leq n} \|\underline{e}^k\|$, allora

$$\|\underline{x}\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e^k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \|\underline{x}_k\| \leq M \cdot \|\underline{x}\|_S,$$

da questo segue che l'applicazione $\underline{x} \to \|\underline{x}\|$ è continua nello spazio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_S)$, allora posto $m = \inf_{\|\underline{x}\|_S = 1} \|\underline{x}\|$ è $m = \min_{\|\underline{x}\|_S =}$
per la compattezza di $\{\underline{x} : \|\underline{x}\|_S = 1\}$ ed è $m \neq 0$, da cui $\|\underline{x}\| \geq m\|\underline{x}\|_S$.

Capitolo VIII

# DERIVABILITÀ

## § 1 – Derivate delle funzioni elementari

**1.1 –** 1) $6(x^5 - x^2 + 1)$

2) $\sum_{k+1}^{n} k\, a_k x^{k-1}$

3) $-\frac{12}{x^4} + 20x^3 + \frac{35}{x^6} - \frac{8}{x^9}$

4) $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{10}{k} + 5\right) x^{k+1} + 3 \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$

5) $\frac{2x}{(1-x^2)^2}$

6) $\frac{(2-n)x^2 + (1-n)(a+b)x - n \cdot ab}{x^{n+1}}$

7) $\frac{2}{(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^2} \left\{(a\beta - b\alpha)x^2 + (a\gamma - c\alpha)x + (b\gamma - c\beta)\right\}$

8) $-\frac{a^2 b^2 c^2 \{3x^2 - 2x(a+b+c) + (ab+ac+bc)\}}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$

9) $\frac{12}{x^{13}}(x^6 + 3x^3 - 1)^3(x^6 + 1)$

10) $5\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^4 \cdot \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2}$.

**1.2 –** 1) $\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}$

3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3} a_k \left(\sqrt[3]{x}\right)^{k-3}$ 4) $\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

5) $-\frac{a+b}{2(x-b)\sqrt{(x+a)(x-b)}}$ 6) $-x^{-1/3}\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{1/2}$

7) $-\frac{1}{6}x^{-2/3}\cdot(1-x)^{-1/3}(1+x)^{-3/2}(3x^2+7x-2)$

8) $\frac{3+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^4}}$ 9) $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

**1.3** – 1) $-3\cos^3 x$ 2) $\alpha\sin 2\alpha x$

3) $\frac{x(2\cos x + x\sin x)}{\cos^2 x}$ 4) $\frac{1-\cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2}$

5) $1\pm\cos 2x = \begin{cases} 2\cos^2 x \\ 2\sin^2 x \end{cases}$ 6) $\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

7) $n\sin^{n-1} x\cdot\cos\{(n+1)x\}$

8) $-n\cos^{n-1} x\cdot\sin\{(n+1)x\}$

9) $\frac{x}{\cos^2(x^2+x+1)}\{\sin 2(x^2+x+1)+2x^2+x\}$

10) $\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\{2x+1+x^2\tan\frac{x}{2}\}$.

**1.4** – 1) $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $\cos(2\arctan x)\cdot\frac{2}{1+x^2} =$

$= \frac{2}{1+x^2}(\cos^2(\arctan x) - \sin^2(\arctan x)) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

3) $-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$ 4) $\frac{a(|a|\pm a)\mp 2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$

5) se $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < kx + \frac{\pi}{2}$ è $f'(x) = (-1)^k$, la derivata non esiste per $x \equiv \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\ \pi)$;



6) $\frac{1}{a+b\cos x}$ 7) $\frac{1}{2(1+x^2)}$

8) $\frac{1}{2}$ 9) $-2\,\mathrm{sgn}\, x\cdot\frac{1}{1+x^2}$

10) $\frac{\sin\alpha\cdot\mathrm{sgn}(\cos x - \cos\alpha)}{(1-\cos\alpha\cdot\cos x)}$.

**1.5** – 1) $\ln x$ 2) $\frac{b-a}{(x+a)(x+b)}$

3) $\frac{1}{\sin x}$ 4) $\frac{1}{x\ln x}$

5) $\frac{1-x^2-x^4}{x^3(1+x^2)}$ 6) $-\frac{1}{\sin x}$

7) $\frac{x^2}{1-x^4}$ 8) $\frac{x}{\cos^2 x}$

9) $-\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ 10) $\frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$.

**1.6** – 1) $e^{(e^x+x)}$ 2) $2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

3) $e^{1-\cos x}(1+x\sin x)$ 4) $\frac{\mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Ch}\, x - 1}$

5) $\frac{4\ln 6\cdot x\cot x^2\cdot 6^{\sqrt[3]{(\ln(\sin x^2))^2}}}{\sqrt[3]{\ln(\sin x^2)^3}}$

6) $\frac{1}{x\,\mathrm{Ch}^2(\ln x)} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ 7) $\mathrm{Ch}\, x\cdot\mathrm{Sh}(\mathrm{Sh}\, x)$

8) $-\frac{e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}}{|1+x|\cdot\sqrt{1-x^2}}$ 9) $\frac{1}{4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\sqrt{(1+e^{-\sqrt{x}})^3}}$

10) $\frac{1}{6\,\mathrm{Ch}\frac{x}{3}\sqrt{\arctan\left(\mathrm{Sh}\frac{x}{3}\right)}}$

**1.7** – 1) $f(x) = x^{x(x-1)} = e^{x(x-1)\ln x}$ da cui

$f'(x) = x^{x(x-1)}\cdot\{(2x-1)\ln x + (x-1)\}$;

2) $f(x) = \sin(x^{\ln x}) = \sin(e^{\ln^2 x})$ da cui

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x} \cdot x^{\ln x} \cdot \cos(x^{\ln x});$$

3) $f(x) = x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x} = e^{(\ln x)e^{x\ln x}}$ da cui

$$f'(x) = x^{(x^x)+x} \cdot \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right);$$

4) $(x^2+2)^{\sin x}\left\{\cos x \cdot \ln(x^2+x) + \frac{2x\sin x}{x^2+2}\right\};$

5) $\frac{-(\cos x)^{1/x}}{x}\left(\frac{\ln\cos x}{x} + \tan x\right).$

1.8 – 1) Posto $x = \mathrm{Sh}\, y$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mathrm{Ch}\ y} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{Sh}^{\,2} y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = D \text{ sett Sh } x;$$

2) $x = \mathrm{Ch}\ y$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mathrm{Sh}\ y} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ch}^{\,2} y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = D\text{sett Ch } x;$$

3) $x = \mathrm{Th}\ y$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\mathrm{Th}^{\,2} y} = \frac{1}{1-x^2} = D \text{ sett Th } x.$$

1.9 – 1) $\frac{e^x}{2\tan e^x \cdot \sqrt{\ln(\sin e^x)}\cdot \mathrm{Ch}^2\sqrt{\ln(\sin e^x)}};$

2) $\frac{2^x \ln 2}{(1+2^{2x})\arctan 2^x}$  3) $-1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\mathrm{Sh}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right);$

4) $-1;$

5) $\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^x\left\{\ln(x-\sqrt{1-x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x-\sqrt{1-x^2}}\right\};$

6) $\frac{(1+e^x)\cos x + (x+e^x)\sin x}{2|\cos x|\cdot\sqrt{(x+e^x)\cos x}};$

7) $\frac{(x^2+\sqrt{x})^{\ln x}}{\cos^2(x^2+\sqrt{x})^{\ln x}}\cdot$



$$\cdot\left\{\frac{\ln(x^2+\sqrt{x})}{x} + \frac{4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x^2+\sqrt{x})}\ln x\right\};$$

8) $\frac{2}{1-x^4} - \sin x;$  9) $-\frac{1}{2};$

10) $\frac{2(\cos x - \sin x)\,\mathrm{Ch}\, x}{(e^x\cos x + e^{-x}\sin x) - \ln 5};$

11) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1-\frac{1}{|x|}\right);$

12) $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{1+\tan^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{1+\tan\left(x+\frac{1}{x}\right)}};$

13) $\cos x\cdot\cos(\sin x);$  14) $\frac{\sin\left(2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2};$

15) $\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}.$

1.10 – Indichiamo con E l'insieme di definizione delle funzioni.

1) $\mathrm{E} - \{-1,1\}$(vedi suggerimento);

$$\ln(1+|\ln|x||) + \mathrm{sgn}(|x|-1)\cdot\frac{1}{1+|\ln|x||}$$

2) E ; $\frac{x+1}{x^2\ln|x| - x}$

3) E ; $\frac{1+\mathrm{sgn}\, x\cdot 3x^2}{2\sqrt{x+|x|^3+1}}$

4) E ; $\mathrm{Sh}\, x$

5) $\mathrm{E} - \{-1\};$

$$|x+1|^{\frac{x}{x-2}}\left\{\frac{x}{(x-2)(x+1)} - \frac{2}{(x-2)^2}\ln|x+1|\right\}$$

6) $\mathrm{E} - \left\{\pm 4k^2\pi^2, \pm(2k+1)^2\pi^2\right\}, k = 0, \pm 1\ldots;$

$$\operatorname{sgn} x \cdot \frac{\cos\sqrt{|x|}}{4\sqrt{|x|}\cdot\sqrt{\sin\sqrt{|x|}}}$$

7) $\mathrm{E} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}; \dfrac{2x(2-x^2)}{|2-x^2|\cdot(x^4-2x^2+2)}$.

**1.11** – $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 4(1-|x|) \to 4$ per $x \to 0$,

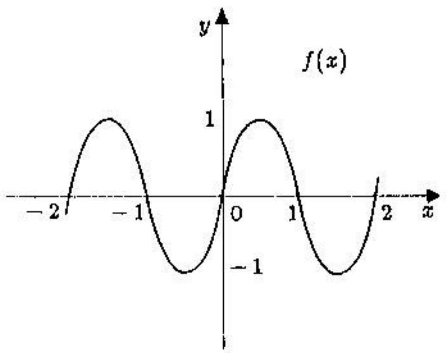
$f$ è derivabile in $x = 0$;

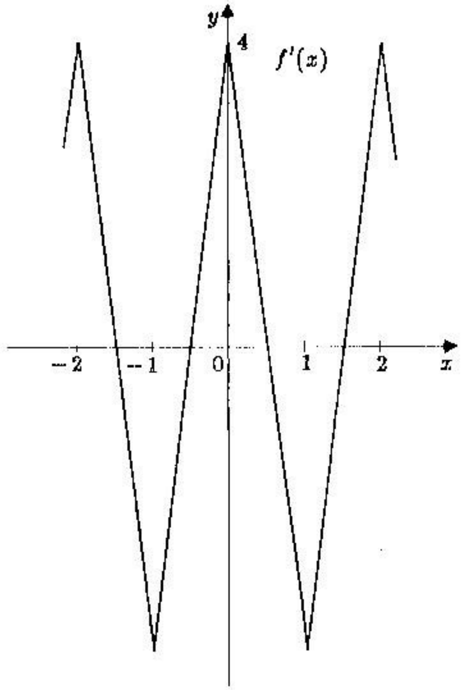
$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = -4(1+h) \to -4$ per $h \to 0^-$,

$\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = 4(-1+h) \to -4$ per $h \to 0^+$,

quindi, per la periodicità, $f$ è derivabile su $\mathbb{R}$;

$f'(x) = 4(1-2|x|)$ per $-1 \le x \le 1$ e quindi $f \in C^1(\mathbb{R})$.




**1.12** – 1) $P \equiv (2,1)$ 2) $P \equiv \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$



3) $P \equiv (1,2)$ $Q \equiv (-1,2)$ 4) $P \equiv \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

**1.13** – Sia $f$ pari,

$$f'(-x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x_0+h)-f(-x_0)}{h} =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} = -f'(x_0).$$

Analogamente per $f$ dispari.

**1.14** – $$f'(x+T) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),$$

da cui il periodo $T'$ di $f'$ o è $T$ o è $\dfrac{T}{n}, n > 1$ (vedi VI.1.20).

Sia $T' = \dfrac{T}{n}, n > 1$; la funzione $F(x) = f(x) - f(x+T')$ è costante, avendo derivata nulla, assurdo; se $F(x) = 0$ sarebbe $f(x) = f(x+T')$, assurdo; supponiamo $F(x) = c \neq 0$, allora $f(x) - f(x+T) = nc$, assurdo.

**1.15** – Poichè $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$, $f$ è continua in $x = 0$; poichè

$$\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\frac{1}{x}$$

non ammette limite per $x \to 0$, $f$ non è derivabile in $x = 0$ (Vedi diagrammi A 25 e A 26).

**1.16** – 1) $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$ da cui

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = f'(1) = n\cdot 2^{n-1};$$

2) $f''(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (k^2-k)\binom{n}{k} x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ da cui

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = f''(1) + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

**1.17 –** $D(f(x)g'(x)-f'(x)g(x)) = f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)-f''(x)g(x)-$
$$-f'(x)g'(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x).$$

**1.18 –** Da $f'(x) = f(x)$ segue che $f'$ è derivabile e $f''(x) = f'(x) = = f(x)$, così procedendo si ha l'asserto.

**1.19 –** $Df(x^3) = 3x^2 f'(x^3)$, $D^2 f(x^3) = 6x f'(x^3) + 9x^4 f''(x^3)$,
$D^3 f(x^3) = 6f'(x^3) + 54x^3 f''(x^3) + 27x f^{(3)}(x^3)$.
$$D^2 f(\sqrt{x}) = \frac{1}{4x}\left\{f''(\sqrt{x}) - \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right\}.$$
$$D^4 f(x-x^2) = 12f''(x-x^2) - 12(1-2x)^2 f^{(3)}(x-x^2) +$$
$$+(1-2x)^4 f^{(4)}(x-x^2)$$

**1.20 –** $$\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right)'' = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right) =$$
$$= x^{-3} f''\left(\frac{1}{x}\right).$$

**1.21 –** $f'(x) = \operatorname{sgn} x \cdot 3x^2$; $f''(x) = 6|x|$, quindi $f^{(3)}(0)$ non esiste.

**1.22 –** Se $g(x_0) \neq 0$ allora $|g(x)|$ è derivabile in $x_0$.
Sia $g(x_0) \neq 0$ e $g'(x_0) = 0$,
$$\lim_{h\to 0}\frac{|g(x_0+h)| - |g(x_0)|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|g(x_0+h)|}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \operatorname{sgn} h \cdot \left|\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right| = 0$$

**1.23 –** $$P(x) = a\cdot\prod_{k=1}^{n}(x-x_k), \quad P'(x) = a\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(x-x_k)\right)$$
$$-\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}, D\left(-\frac{P'(x)}{P(x)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2}$$
da cui l'asserto. La seconda parte è evidente.



**1.24 –** $$D^2 y = \frac{1}{4}\cdot\frac{2P(x)P''(x) - (P'(x))^2}{P(x)\cdot\sqrt{P(x)}},$$
da cui
$$y^3 D^2 y = \frac{1}{4}(2P(x)P''(x) - (P'(x))^2),$$
da cui
$$y^{-2}D(y^3 D^2 y) = \frac{P^{(3)}(x)}{2} = c$$
poichè $P(x)$ è di terzo grado.

**1.25 –** $\frac{d}{dx}f(ax+b) = af'(ax+b)$, $\frac{d^2}{dx^2}f(ax+b) = a^2 f''(ax+b)$,
per ricorrenza si ha l'asserto.

**1.26 –** $D^{100}(\sin x\cos x) = \frac{1}{2}D^{100}\sin 2x = 2^{99}\sin 2x$.

**1.27 –** $\frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ da cui
$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = (-1)^{n-1}\cdot c^{n-1}\cdot n!\frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}}.$$

**1.28 –** 1) $2^x \ln^n 2$;

2) $$D^n x^2 \ln x = \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}(D^k x^2)(D^{n-k}\ln x) =$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^{n-2}} + (-1)^{n-2}\frac{2n(n-2)!}{x^{n-2}} +$$
$$+(-1)^{n-3}\frac{n(n-1)(n-3)!}{x^{n-2}} = (-1)^{n-3}\frac{2(n-3)!}{x^{n-2}};$$

3) $$D^n x^3 e^{2x} = \sum_{k=0}^{3}\binom{n}{k}(D^k x^3)2^{n-k}e^{2x} =$$
$$= 2^{n-3}e^{2x}(8x^3 + 12nx^2 + 6n(n-1)x +$$
$$+n(n-1)(n-2));$$

4) $$D^n e^x \cos 2x = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k \cos 2x =$$

$$= e^x \cos 2x \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (-1)^k 2^{2k} +$$

$$+ e^x \sin 2x \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k+1} (-1)^{k+1} 2^{2k+1}.$$

**1.29 –** $$D^n \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right) = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} (D^k x^3) \left(D^{n-k} \frac{1}{x^2-1}\right) =$$

$$= x^3 D^n \frac{1}{x^2-1} + 3nx^2 D^{n-1} \frac{1}{x^2-1} +$$

$$+ \binom{n}{2} 6x D^{n-2} \frac{1}{x^2-1} + \binom{n}{3} 6 D^{n-3} \frac{1}{x^2-1},$$

da cui

$$\left[D^n \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)\right]_0 = n(n-1)(n-2) \left[D^{n-3} \frac{1}{x^2-1}\right]_0 ;$$

$$D^r \frac{1}{x^2-1} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left(D^k \frac{1}{x-1}\right) \left(D^{r-k} \frac{1}{x+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \frac{(-1)^k \cdot k!}{(x-1)^{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{r-k+1}(r-k)!}{(x+1)^{r-k+1}}$$

$$\left[D^{n-3} \frac{1}{x^2-1}\right]_0 = \sum_{k=0}^{n-3} (n-3)!(-1)^{n-k-3} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ (n-3)! & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

da cui l'asserto.

**1.30 –** 1) $$D^n \frac{\ln x}{x} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^k \ln x) \left(D^{n-k} \frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \ln x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \cdot \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} =$$



$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \ln x - (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$ da cui l'asserto.

2) Per $n = 0$ è vera, passiamo da $n$ a $n+1$:

$$D^{n+1}(e^x \sin x) = D(D^n(e^x \sin x)) =$$

$$= 2^{n/2} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) + 2^{n/2} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^{\frac{n+1}{2}} e^x \left\{\cos\frac{\pi}{4} \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\frac{\pi}{4} \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)\right\} =$$

$$= 2^{n+1/2} e^x \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{4}\right).$$

**1.31 –** $$x' = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+x^2(y)}} = 1 + \frac{1}{x^2(y)},$$

$$x'' = -\frac{2}{x^3(y)} \left(1 + \frac{1}{x^2(y)}\right).$$

**1.32 –** Per $n = 1$ è vera, passiamo da $n$ a $n+1$:

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n\theta}{dx^n}\right) =$$

$$= (-1)^n (n-1)! \left\{n \sin^{n-1}\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{d}{dx} \sin n\theta + n \sin^n \theta \cos n\theta \cdot \frac{d\theta}{dx}\right\} =$$

$$= (-1)^{n+1} n! \sin^{n+1}\theta \{\cos\theta \sin n\theta + \cos n\theta \sin\theta\} =$$

$$= (-1)^{n+1} n! \sin^{n+1}\theta \cdot \sin(n+1)\theta.$$

○ **1.33 –** Per induzione:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} ;$$

$$g^{(k+1)}(y) =$$

$$= \frac{d}{dy}\left\{\left[f'(g(y))\right]^{-2k+1} \cdot P_k\left[f'(g(y)), \ldots, f^{(k)}(g(y))\right]\right\} =$$

$$= (-2k+1)\left[f'(g(y))\right]^{-2k} \cdot f''(g(y)) \cdot \left[f'(g(y))\right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot P_k\left[f'(g(y)), \ldots, f^{(k)}(g(y))\right] + \left[f'(g(y))\right]^{-2k+1} \cdot$$

$$\cdot \frac{d}{dy} P_k \left[ f'(g(y)), \ldots, f^{(k)}(g(y)) \right].$$

Poichè $\frac{d}{dy} P_k[f'(g(y)), \ldots, f^{(k)}(g(y))]$ è data dal prodotto di un polinomio $\overline{P}_k$ nelle variabili $f'(g(y)), \ldots, f^{(k+1)}(g(y))$ moltiplicato per $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ si ha

$$g^{(k+1)}(y) = \left[ f'(g(y)) \right]^{-2k-1} \cdot P_{k+1} \left[ f'(g(y)), \ldots, f^{(k+1)}(g(y)) \right].$$

Allora se $f \in C^n((a,b))$ e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$, si ha che anche $g \in C^n(J)$.

**1.34** – 1) $E = \{x : x \neq \sqrt[3]{2k\pi},\ k \in \mathbb{N}\}$.

2) È prolungabile con continuità in $x = \sqrt[3]{2k\pi}$ con $k = 0$, $k > 0$ dispari, in tali punti si pone $f(x) = 0$.

3) $x = 0 : f'_-(0) = 1,\ f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{\sin^5\left(\frac{h^2}{2}\right)}{h \tan^2\left(\frac{h^3}{4}\right)} = 0$, non derivabile;

$x = \sqrt[3]{2k\pi},\ k > 0$ dispari:

$$\frac{\sin^5 \frac{(\sqrt[3]{2k\pi} + h)^2}{2}}{h \tan^2 \frac{(\sqrt[3]{2k\pi} + h)^3}{4}}, \text{ poiché}$$

$$\left| h \tan^2 \frac{(\sqrt[3]{2k\pi} + h)^3}{4} \right| = \left| h \tan^2 \left( k\frac{\pi}{2} + hO(1) \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{h}{\tan^2(hO(1))} \right| \to +\infty \text{ per } h \to 0$$

ed il numeratore è limitato, la derivata esiste ed è nulla.

**1.35** –

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x} & \text{per} \quad x > 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{per} \quad x = 0\ ; \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \mathrm{Sh}\sqrt{-x} & \text{per} \quad x < 0 \end{cases}$$



$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4x\sqrt{x}} \sin\sqrt{x} - \dfrac{1}{4x} \cos\sqrt{x} & \text{per} \quad x > 0 \\ \dfrac{1}{12} & \text{per} \quad x = 0\ . \\ +\dfrac{1}{4x\sqrt{-x}} \mathrm{Sh}\sqrt{-x} - \dfrac{1}{4x} \mathrm{Ch}\sqrt{-x} & \text{per} \quad x < 0 \end{cases}$$

## § 2 – Teorema de l'Hospital e Formula di Taylor

**2.1** – 1) $+\infty$; basta applicare $[k] + 1$ volte la regola dell'Hospital.

2) $0$ : da 1) ponendo $u = \ln x$.

3) $+\infty$.

**2.2** – 1) Posto $u = \frac{1}{x^2}$ si ottiene da VIII.2.1.1) $\lim_{u \to +\infty} u^{-k/2} e^{-u} = 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

2) $x^k e^{\sin x + \ln x} = x^{k+1} e^{\sin x}$, quindi il limite è $+\infty$ per $k > -1$, $0$ per $k < -1$ e non esiste se $k = -1$.

**2.3** – 1)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{Th}x - \sin x}{(\ln(1+x))^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{Th}x - \sin x}{x^3} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \mathrm{Th}^2 x - \cos x}{3x^2} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} - x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6};$$

2) con 2 derivazioni si ottiene $1/2$; 3) $\dfrac{\sin a \cos a}{a}$;

4) $\dfrac{32}{27}$; 5) $1$

6) ponendo nella forma $\dfrac{\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x}{\frac{1}{x}}$

e derivando 2 volte si ottiene $\dfrac{1}{2e}$;

7) 1.

**2.4** – $\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2-1} = 1/2$

quindi $f$ è prolungabile con continuità.

$$\lim_{h\to 0} \left\{ \frac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} - \frac{1}{h} \right\} \cdot \frac{1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)\ln(1+h) - h(2+h)}{4h^2+2h^3} = 0,$$

tale risultato si ottiene applicando due volte la regola dell'Hospital.

**2.5** –

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad ; \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}}{\cos x}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, poichè non esiste $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

La forma generale del teorema dell'Hospital afferma (sotto opportune ipotesi qui verificate) che vale la relazione

$$\liminf_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \le \liminf_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \le$$

$$\le \limsup_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \le \limsup_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'esempio precedente mostra che la prima e l'ultima diseguaglianze possono essere strette.

**2.6** –

$$\lim_{x\to 0} (f(x))^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln f(x)}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = e^{f'(0)}.$$

**2.7** – $g'(0) = 0;$

$g''(0) = -1 - 2(b-a)$ da cui deve essere $a - b = -\frac{1}{2}$;

$g^{(3)}(0) = 0;$

$g^{(4)}(0) = 1 - 12b$ da cui $b = \frac{1}{12}$, $a = -\frac{5}{12}$;

in tal modo $g(x)$ per $x \to 0$ è infinitesima di ordine superiore al quarto rispetto ad $x$.



**2.8** –

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k)^{1/x}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k)^{1/x}\right)},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k)^{1/x}\right)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left\{\frac{\frac{-1}{x^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^{1/x}\ln a_k}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^{1/x}}\right\}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}.$$

**2.9** – 1) Applicando il teorema dell'Hospital otteniamo $\frac{2g'(y)-1}{2y}$, poichè $g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$, riapplichiamo il teorema dell'Hospital, da cui

$$\frac{2g''(y)}{2} \to g''(0) = 0\ .$$

2) $\lim_{y\to 0} \frac{g(y)}{y} = \lim_{y\to 0} g'(y) = +\infty$, poiché per $y \to 0$ anche $x \to 0$ e $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0^+$.

**2.10** – 1) $\ln(2+h) = \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + O(h^4)$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + O(h^4)\right\};$

3) $e^{\frac{1}{1+h}} = e\left\{1 - h + \frac{3}{2}h^2 - \frac{13}{6}h^3 + O(h^4)\right\}.$

**2.11** – 1) $\frac{b+x}{a+x} = \frac{1}{a}\left\{b + \frac{a-b}{a}x - \frac{a-b}{a^2}x^2 + \frac{a-b}{a^3}x^3 + O(x^4)\right\}$

2) $\frac{1+x}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{33}{48}x^3 + O(x^4);$

3) $(1+e^x)^3 = 8+12x+12x^2+9x^3+O(x^4)$

4) $\dfrac{\sin x}{1-x} = x + x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 + O(x^4)$.

**2.12** – 1) $(1+x)^x = 1 + x^2 + O(x^3)$

2) $(\mathrm{Ch}x)^{\sin x} = 1 + O(x^3)$

3) $\sin(\ln(1+x)) = x - \dfrac{x^2}{2} + O(x^3)$.

∘ **2.13** – $F'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$ e, per il teorema di Cauchy, esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$R_n(x) = F(x) - F(x_0) = \frac{F'(c)}{G'(c)}[G(x) - G(x_0)] =$$

$$= \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{G(x)-G(x_0)}{G'(c)}.$$

Ponendo $G(t) = (x-t)^{n+1}$ si ottiene il resto nella forma di Lagrange; con $G(t) = x - t$ si ottiene il cosiddetto resto nella forma di Cauchy.

**2.14** – 1) La formula di Maclaurin per $\sin x$ dà

$$\sin\frac{1}{3} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!\,3^{2k+1}} + \frac{(-1)^{n+1}\cos c}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{3^{2n+1}}.$$

Basta scegliere $n$ in modo che sia $\dfrac{1}{(2n+1)!3^{2n+1}} < 10^{-6}$; con $n = 3$ il valore cercato è $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3^3 \cdot 3!} + \dfrac{1}{3^5 \cdot 5!}$.

2) $$\sqrt[7]{1+\frac{1}{4}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{1/7}{k} 4^{-k} + (1+c)^{\frac{1}{7}-(n+1)} \binom{1/7}{n+1} 4^{-(n+1)},$$

basta scegliere $n$ in modo che sia $\left|\dbinom{1/7}{n+1}\right| 4^{-(n+1)} < 10^{-6}$.



$$\left|\binom{1/7}{n+1}\right| = \frac{\left|\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{7}-n\right)\right|}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{7}\left|\frac{1}{7}-1\right| \cdot \left|\frac{1}{2\cdot 7}-1\right| \cdots$$

$$\cdots \left|\frac{1}{7n}-1\right| \cdot \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{7(n+1)};$$

quindi basta che sia $7(n+1)\cdot 4^{n+1} > 10^6$ cioè $n \ge 7$. Il valore cercato è dato da

$$1 + \sum_{k=1}^{7} \binom{\frac{1}{7}}{k} \cdot 4^{-k}.$$

**2.15** – $\sqrt[5]{20} = \sqrt[5]{32-12} = 3\sqrt[5]{1-\dfrac{3}{8}}$;

procedendo come in VIII.2.14 su $\sqrt[5]{1-\dfrac{3}{8}}$ si ottiene

$$\sqrt[5]{20} = 2\left[1 + \sum_{k=1}^{3}(-1)^k \binom{\frac{1}{5}}{k}\left(\frac{3}{8}\right)^k\right] + \theta$$

con $|\theta| < 10^{-3}$.

**2.16** – $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^k}{k+1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+2)(1+c)^{n+2}}$

con $c \in (0, \frac{1}{2})$. Basta scegliere $n$ in modo che sia

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+2)(1+c)^{n+2}}\right| \le \frac{x^{n+1}}{n+2} \le \frac{1}{2^{n+1}(n+2)} < 10^{-5};$$

ciò si ottiene con $n = 12$. Il polinomio richiesto è

$$\sum_{k=0}^{12}(-1)^k \frac{x^k}{k+1}.$$

**2.17** – Poichè $f'(x) > 1$, $f$ è invertibile su tutto $\mathbb{R}$.
Calcolando le derivate della funzione inversa in $y = 0$, si ottiene il seguente polinomio di terzo grado

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{3!16}y^3 .$$

○ **2.18** – $\pi = 16\alpha - 4\beta$; poichè

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}4\alpha - 1}{\operatorname{tg}4\alpha + 1}$$

e $\operatorname{tg}4\alpha = \dfrac{120}{119}$, si ha

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239} .$$

Approssimiamo $\arctan\frac{1}{5}$ e $\arctan\frac{1}{239}$ a meno di $10^{-8}$, questi si ottengono mediante la formula di Taylor centrata nell'origine arrestandosi rispettivamente al termine di 9° grado e di 3° grado. L'espressione richiesta è

$$16\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\frac{1}{5^{2k+1}} - 4\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\frac{1}{239^{2k+1}} .$$

## § 3 – Proprietà delle funzioni derivabili

**3.1** – $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$, $f'(x) = 0$ per $x = 1$, $x = 3$; in $x = 3$ $f(x)$ ha un minimo, $f(3) = k$; in $x = 1$ $f(x)$ ha un massimo $f(1) = 4 + k$; quindi deve essere $k < -4$ o $k > 0$.

○ **3.2** – 1) Sono in numero dispari poiché $P'$ deve cambiare segno un numero dispari di volte;
2) se $\alpha, \beta$ sono due radici consecutive di $P'(x)$ e se $P(\alpha)$ e $P(\beta)$ hanno lo stesso segno, non vi è alcuna radice di $P(x)$ fra $\alpha$ e $\beta$; se $P(\alpha)$ e $P(\beta)$ hanno segno diverso vi è una radice di $P(x)$.



Per $n = 1$ e $n = 2$ la proprietà è vera; supponiamola vera per $n = 2k$, allora $P'(2k+1, x) = P(2k, x)$ non ha radici quindi $P(2k+1, x)$ è monotona ed ha una sola radice; supponiamola vera per $n = 2k+1$, allora $P'(2k+2, x) = P(2k+1, x)$ ha una radice $\overline{x} \neq 0$, $P(2k+2, \overline{x}) = P(2k+1, \overline{x}) + \dfrac{\overline{x}^{2k+2}}{(2k+2)!} > 0$, quindi, avendo minimo positivo, $P(2k+2, x)$ non ammette radici.

**3.3** – 
$$f'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{(Q(x))^2},$$

il segno di $f'(x)$ dipende dal segno del polinomio $P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)$, poichè esiste $R$ per cui tale polinomio non ammette radici di modulo maggiore di $R$, segue l'asserto.

**3.4** – $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(\xi)$, $\xi = x_0 + \theta h \quad (0 < \theta < 1)$;

per $h \to 0$ è $\xi \to x_0$ e poiché esiste il limite di $f'(\xi)$, segue l'asserto.

**3.5** – $g(x) = f(x) - Cx$ è continua e derivabile, $g'(a) = A - C < 0$, $g'(b) = B - C > 0$, quindi $g$ ha un minimo in $\xi$ con $a < \xi < b$ e $g'(\xi) = f'(\xi) - C = 0$.

**3.6** – Per VIII.3.5 $f'(x)$ ha sempre lo stesso segno, da cui l'asserto.

**3.7** – Se $f$ è costante, ovvio.
Sia $c > a$ e $f(c) > f(a)$: per $x > \overline{x}(c)$ è $f(x) < f(c)$, quindi, in $[a, \overline{x}]$, $f(x)$ ammette un massimo assoluto necessariamente non agli estremi; sia $\xi$ il punto di massimo, allora $f'(\xi) = 0$.

**3.8** – Per il teorema dell'incremento finito è $f(x) \leq f(a) + M(x - a)$ per $a \leq x \leq b$; supponiamo che esista $\overline{x}$ tale che $f(\overline{x}) < f(a) + M(\overline{x} - a)$, allora poiché $f(b) \leq f(\overline{x}) + M(b - \overline{x})$ segue $f(b) < f(a) + M(b - a)$, assurdo.

**3.9** – Per $x_1, x_2 \in I$ è $|f(x_1) - f(x_2)| < M|x_1 - x_2|$, da cui, per ogni $\varepsilon > 0$, scelto $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ è $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ se $|x_1 - x_2| < \delta$.

**3.10** – $$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| = |f'(x + \theta h) - f'(x)|, \quad 0 < \theta < 1,$$
per il teorema dell'incremento finito; per l'uniforme continuità di $f'$ segue l'asserto.

**3.11** – $f'(x) = 12(x^2 + x - 1), g'(x) = 12x(x^2 + x - 1)$; $f'$ e $g'$ si annullano contemporaneamente in un punto interno all'intervallo $(0, 1)$ contro le ipotesi per il teorema di Cauchy nella forma fratta.

∘ **3.12** – Se $f$ è costante è ovvio.
Se $f$ non è costante, sia
$$Z(f) = \{x : x \in [a, b], f(x) = 0\},$$
$Z(f)$ è chiuso in $[a, b]$ per la continuità di $f$, allora esiste in $[a, b] - Z(f)$ un intervallo $(\alpha, \beta)$ con le proprietà citate nel suggerimento.
$\lim_{x \to \substack{\alpha \\ \beta}} \ln |f(x)| = -\infty$ quindi
$$D(\ln |f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
non è limitata né superiormente né inferiormente (teorema dell'incremento finito), allora per VIII.3.5 assume ogni valore finito.

∘ **3.13** – Se $f'(x)$ è costante è ovvio. Altrimenti consideriamo $G(x)$, è continua in $[a, b]$ e derivabile in $(a, b)$, $G(x)$ ammette un massimo assoluto ed un minimo assoluto in $[a, b]$; se $a$ e $b$ sono ambedue di massimo, il minimo è interno e viceversa; supponiamo che sia $a$ di massimo e $b$ di minimo:
$$f'(a) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$
poiché
$$f'(b) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



esiste $\overline{x} < b$ con
$$f(\overline{x}) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(\overline{x} - a),$$
cioè
$$\frac{f(\overline{x}) - f(a)}{\overline{x} - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$
assurdo; allora in ogni caso uno degli estremi è interno, sia in $\xi$; annullando la derivata di $G(x)$ in $\xi$ si ottiene l'asserto.

**3.14** – 1) Sia $\xi$ un punto di minimo assoluto con ordinata negativa, allora, essendo $f'(\xi) = 0$, per la formula del Taylor è
$$f(b) = f(\xi) + \frac{(b - \xi)^2}{2!} \cdot f''(\theta) < 0, \quad \xi < \theta < b,$$
assurdo.
2) Applicando il risultato dal punto 1) alla funzione
$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
si ha l'asserto.

**3.15** – 1) $D\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,
$D(xf'(x) - f(x)) = xf''(x) > 0$
per $x > 0$, allora $xf'(x) - f(x)$ è crescente e negativa poiché il suo limite per $x \to +\infty$ è minore o eguale a 0, ne segue che $\frac{f(x)}{x}$, avendo derivata negativa, è decrescente.
2) $xf'(x) - f(x)$ è crescente e positiva in $x = 0$, quindi è sempre positiva, per cui $\frac{f(x)}{x}$ risulta essere crescente in $(0, +\infty)$.
3) Se $f(0) = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ e per 2) segue l'asserto.

**3.16** – Per ogni $h > 0$ è $|f'(x)| \leq hM_2 + \frac{M_0}{h}$, da cui $h^2 M_2 - hM_1 + M_0 \geq 0$ per ogni $h > 0$; poiché le eventuali radici sono positive deve essere $M_1^2 \leq 4M_0M_2$.

**3.17** –
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| < |x-y| \to 0$$
per $x \to y$, da cui $f$ è derivabile con derivata nulla.

○ **3.18** – Mostriamo che $f(x)$ è nulla nell'intervallo $\left[a, a+\frac{1}{2A}\right]$ ; per assurdo sia $\overline{x}$, $a < \overline{x} \le a + \frac{1}{2A}$, un punto di massimo assoluto per $|f(x)|$, con $f(\overline{x}) \neq 0$; allora per il teorema dell'incremento finito esiste $\xi$, con $a < \xi < \overline{x}$ tale che
$$|f'(\xi) = \frac{|f(\overline{x})|}{|\overline{x}-a|} > A|f(\overline{x})| \ge A|f(\xi)|,$$
assurdo.
Ripetendo il ragionamento per i successivi intervalli di ampiezza $\frac{1}{2A}$ segue l'asserto.

**3.19** – $(f \circ g)(x) = g(x) + \lambda = g(x+\lambda) = (g \circ f)(x)$, derivando è $g'(x) = g'(x+\lambda)$ da cui l'asserto.

**3.20** – $f'(x) = 1 + \varepsilon g'(x)$ e per $h = \frac{1}{M}$, $f'(x)$ ha segno costante.

**3.21** – 1) $f(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x), 0 < \theta < 1$, da cui $|f(x)| \le |x|^n \cdot K^n \to 0$ per $n \to +\infty$ per $|x| < \frac{1}{2K}$; procedendo poi come VIII.3.18 si ha l'asserto.
2) $g'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$, passiamo da $n-1$ ad $n$:
$$g^{(n)}(x) = \left(g^{(n-1)}(x)\right)' = -\frac{1}{x^2} G'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} +$$
$$+\frac{2}{x^3} G_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = G_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$$
ove
$$G_n\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} G'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} G_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right),$$
quindi $g \in C^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$; poiché $\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0$ per VIII.3.4 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ (vedi diagramma A 17).



**3.22** –
$$f''(x) = \frac{1-s}{s^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(xa_k + (1-x)b_k)^s\right\}^{\frac{1-2s}{s}} \cdot$$
$$\cdot\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}(xa_k + (1-x)b_k)^{s-1}\cdot(a_k - b_k)\right)^2 - \right.$$
$$-\left(\sum_{k=1}^{n}(xa_k + (1-x)b_k)^s\right)\cdot$$
$$\left.\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}(xa_k + (1-x)b_k)^{s-2}\cdot(a_k - b_k)^2\right)\right\};$$
posto $A_k = xa_k + (1-x)b_k$, $B_k = a_k - b_k$, applicando la I.5.13 a
$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^{s/2}(A_k^{(s-2)/2} B_k)\right)^2$$
si deduce che $f''(x) \ge 0$ per $x \in [0,1]$.
Posto $x = 1/2$ essendo $f(1/2) \le \frac{f(0)+f(1)}{2}$, si ottiene la disuguaglianza di Minkowski.

○ **3.23** – L'insieme dei punti ove $\max(f,g)$ non è differenziabile è contenuto nell'insieme
$$E = \{x : f(x) = g(x)\} \cap \{x : f'(x) \neq g'(x)\};$$
per la differenziabilità di $f$ e $g$ tale insieme è costituito da tutti punti isolati e quindi è al più numerabile.

○ **3.24** – Se
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}, f'(0) = 0$$
posto

$$\beta_n = \frac{1}{2n\pi}, \alpha_n = \frac{1}{(2n+1/2)\pi} \text{ è } \frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} \to -\frac{2}{\pi}.$$

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} - f'(\overline{x}) = \frac{\beta_n-\overline{x}}{\beta_n-\alpha_n}\left\{\frac{f(\beta_n)-f(\overline{x})}{\beta_n-\overline{x}} - f'(\overline{x})\right\} +$$

$$+\frac{\alpha_n-\overline{x}}{\beta_n-\alpha_n}\left\{\frac{f(\alpha_n)-f(\overline{x})}{\alpha_n-x} - f'(\overline{x})\right\} \to 0$$

poiché $\frac{\alpha_n-\overline{x}}{\beta_n-\alpha_n}$ è limitato con $\frac{\beta_n-\overline{x}}{\beta_n-\alpha_n}$ e le quantità tra parentesi tendono a zero.

**3.25** – $f(x_0+\beta h) = f(x_0) + \beta h f'(x_0) + o(h)$,
$f(x_0-\alpha h) = f(x_0) -$
$-\alpha h f'(x_0) + o(h)$ per $h \to 0$, da cui
sottraendo si ha l'asserto.
Siano $f(x) = |x|$, $\alpha = \beta = 1$, $x_0 = 0$: $f'(0)$ non esiste mentre
$\frac{|h|-|h|}{2h} \to 0$ per $h \to 0$.

∘ **3.26** – Supponiamo per assurdo che esistano $\overline{\varepsilon} > 0, \overline{\delta} > 0$ per i quali vi sono dei punti $z$, che possiamo supporre in $(0,1)$, tali che sia

$$|f(z) - f(0)| > \overline{\varepsilon} + \overline{\delta} z$$

e sia $E$ l'insieme di tali punti. Sia $\hat{z} = \inf E$, è $\hat{z} > 0$ e $\hat{z} \notin E$ per la continuità di $f$; estraiamo da $E$ una successione $\{z_n\}$ con $z_n \to \hat{z}$ per $n \to +\infty$; posto $h_n = z_n - \hat{z}$ è

$$0 < \overline{\delta} < \left|\frac{f(\hat{z}+h_n) - f(\hat{z}-h_n)}{2h_n}\right| \to 0$$

per $n \to +\infty$, assurdo.
Allora è $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon + \delta|x|$ per ogni $\varepsilon > 0, \delta > 0$ e quindi è $f(x) = f(0)$ su $(-1,1)$.

**3.27** – Con la formula del Taylor arrestata al secondo ordine, procedendo come in VIII.3.25 si ha l'asserto.



$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{per} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{per} \quad x \geq 0 \end{cases},$$

allora $f''(0)$ non esiste mentre la derivata seconda simmetrica è nulla.

∘ **3.28** – Se in $x_0$ $\varphi(x)$ ha un massimo, è

$$\frac{\varphi(x_0-h)+\varphi(x_0+h)-2\varphi(x_0)}{h^2} \leq 0$$

quindi la derivata seconda simmetrica è negativa o nulla, ma tale derivata è uguale a $2\varepsilon$, assurdo; quindi $\varphi(x) \leq 0$ su $[a,b]$, cioè

$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon(x-a)(x-b) < \varepsilon(b-a)^2$.
Facendo considerazioni analoghe su $\psi(x)$ si ottiene

$$\left|f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right| \leq \varepsilon(b-a)^2$$

e, per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, segue l'asserto.

**3.29** – 1) Per induzione usando la formula del Taylor
2) $f'(0) = 0$, $f'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x^2} - 2\cos\frac{1}{x^2}$ per $x \neq 0$; $f''(0)$ non esiste mentre

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^3 \sin\frac{1}{h^2}}{h^2/2!} = 0 = [f''(0)].$$

**3.30** – $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h^2/2!} \to [f''(x_0)];$$

$$\frac{f(x_0-h) - f(x_0) + hf'(x_0)}{h^2/2!} \to [f''(x_0)],$$

sommando segue l'asserto.

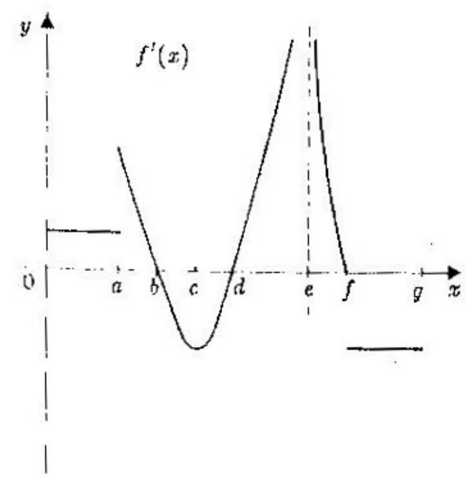
Capitolo IX

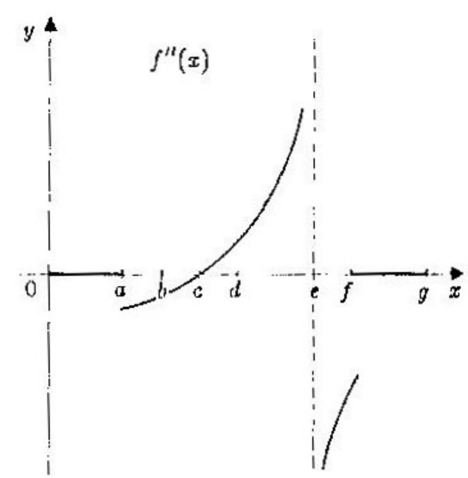
# STUDIO DI FUNZIONI

Nelle soluzioni del presente capitolo sono usate le seguenti abbreviazioni:
$E(f)$: insieme di definizione di $f(x)$;
$E(f')$: insieme in cui $f(x)$ ammette derivata prima;
$E(f'')$: insieme in cui $f(x)$ ammette derivata seconda;
$Z(f), Z(f'), Z(f'')$: insieme degli zeri rispettivamente di $f(x), f'(x), f''(x)$;
$P(f), P(f'), P(f'')$: insieme in cui rispettivamente $f(x), f'(x), f''(x)$ sono strettamente positive.

## § 1 – Esercizi introduttivi sullo studio dell'andamento delle funzioni reali di variabile reale

**1.1** –




**1.2** – Siano $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, allora per ogni $h, k > 0$ con $h < x_2 - x_1$, $k < x_2 - x_1$, si ha

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_2-k)}{k}$$

per la convessità. Da cui

$$f'(x_1) = f'_+(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'_-(x_2) = f'(x_2).$$

**1.3** – Poichè

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left\{\sqrt{2}\sin\left(1+\ln\sqrt{x}+\frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

si ha

$$Z(f') = \left\{x_k = e^{\pi(2k-1/2)-2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Se $k$ è pari poichè in un intorno (opportuno) sinistro di $x_k$ $f'(x) < 0$ ed in un intorno destro $f'(x) > 0, x_k$ è di minimo e di conseguenza se $k$ è dispari $x_k$ è di massimo.

**1.4** – $y = f(x)$ è l'equazione di una parabola concava verso l'alto.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2p_k(x-a_k)$$

e per

$$\overline{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \qquad \text{è} \qquad f'(\overline{x}) = 0,$$

quindi $\overline{x}$ è il punto di minimo assoluto.

**1.5** – $E(f_\lambda) = \{x : x \le \lambda\}$; $f'_\lambda(x) = \dfrac{-5x^2+4\lambda x}{2\sqrt{\lambda - x}}$; affinché $f'_\lambda(1) = 0$ deve essere $\lambda = \dfrac{5}{4}$ e dal segno di $f'_\lambda$ si ha che $f_{5/4}(x)$ ha un massimo in $x = 1$.

**1.6** – Poiché $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$ si annulla solo per $x = e^{-1}$ ed inoltre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, f(e^{-1}) = e^{-e^{-1}} < 1$, in $x = e^{-1}$ si ha il minimo assoluto (vedi diagramma A.19).



**1.7** – $f(x)$ è sempre derivabile (vedi VIII.1.21) ed è

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 - 12(4x-5)^2, & x \le 0 \\ 3x^2 - 12(4x-5)^2, & 0 < x \le \dfrac{5}{4} \\ 3x^2 + 12(4x-5)^2, & x > \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$Z(f') = \left\{\dfrac{70}{63}\right\}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, quindi $x = \dfrac{70}{63}$ è minimo assoluto.

**1.8** – $f(x) = -\dfrac{12}{5!}x^5 + o(x^5)$ per $x \to 0$, quindi $f(x)$ è puntualmente decrescente nell'origine.

**1.9** – $f(0) = 1$, $f(\sqrt[3]{2}) = e^{\sqrt[3]{4}}$; $f'(x) = 0$ per $x = 1$ e $f(1) = e^{\sqrt{3}}$, quindi $x = 0$ è minimo assoluto e $x = 1$ è massimo assoluto.

**1.10** – $g(x) = x^p(s-x)^q$, $0 \le x \le s$, si annulla agli estremi e $g'(x)$ in $0 < x < s$ si annulla solo per $x = p \cdot \dfrac{s}{p+q}$ ove assume quindi il massimo. Poiché in tale punto $y = q \cdot \dfrac{s}{p+q}$, segue l'asserto.

**1.11** – $f(x)$ è derivabile per $x \ne 1$ ed $f'(x) = 0$ per $x = \pm\dfrac{3}{2}$; $f'_+(-2) = -1$, $f'_-(1) = 5$, $f'_+(1) = -1$, $f'_-(3) = 3$ da cui $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$ sono punti di massimo, $x = \pm\dfrac{3}{2}$ sono punti di minimo; $x = 3$ è di massimo assoluto e $x = -\dfrac{3}{2}$ è di minimo assoluto.

**1.12** – $f(x)$ è derivabile per $x \ne 0, 1$,

$$f'(x) = \begin{cases} (x-2)e^{-x}, & x < 0 \\ -xe^x, & 0 < x < 1 \\ xe^x, & x > 1 \end{cases}$$

$f'(x) \ne 0$ sempre;

$f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e $f(x) > 0$

per $x \neq 1$, da cui:

$$\sup_{(-\infty,+\infty)} f(x) = +\infty \qquad \inf_{(-\infty,+\infty)} f(x) = f(1) = 0$$

$$\sup_{[-1,1)} f(x) = f(-1) = 2e \qquad \inf_{[-1,1)} f(x) = 0$$

$$\sup_{[0,1]} f(x) = f(0) = 1 \qquad \inf_{[0,1]} f(x) = f(1) = 0$$

$$\sup_{[-1,3]} f(x) = f(3) = 2e^3 \qquad \inf_{[-1,3]} f(x) = f(1) = 0.$$

**∘ 1.13 –** Fissato $\theta$, detto $\overline{x}(\theta)$ lo zero di $F$, ogni $x \geq \overline{x}$ verifica la disuguaglianza; se $x_0 = \sup\limits_{0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}} \overline{x}(\theta)$, per $x \geq x_0$ la disuguaglianza è verificata per ogni $\theta$.

$$\overline{x}(\theta) = \frac{b\cos\theta - a}{\cos^2\theta}, \ \overline{x}'(\theta) = \frac{\cos\theta\sin\theta(b\cos\theta - 2a)}{\cos^4\theta},$$

$\overline{x}'(\theta) = 0$ per $\theta = 0$ e, se $\dfrac{2a}{b} \leq 1$, per $\theta = \arccos\dfrac{2a}{b}$;

$$\overline{x}(0) = b - a, \ \overline{x}\left(\arccos\frac{2a}{b}\right) = \frac{b^2}{4a}$$

da cui se $\dfrac{2a}{b} > 1 \quad x_0 = b - a$, se $\dfrac{2a}{b} \leq 1 \quad x_0 = \dfrac{b^2}{4a}$.

**1.14 –** Detto $\beta = \widehat{ABC}$ è $BC = h \text{ cotan } \gamma + h \text{ cotan } (\pi - \alpha - \gamma)$, la derivata rispetto a $\gamma$ si annulla per $\gamma = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$, quindi il massimo si realizza con il triangolo isoscele.

**1.15 –** $f(0) = -5$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, quindi per $x > 0$ $f(x)$ ha un numero dispari di radici; $f'(x) = 6x(12x^4 - 7x - 1)$ e si annulla, per $x > 0$, in un solo punto $\overline{x}$ ove $f(x)$ ha un minimo (per ottenere questo basta confrontare $12x^4$ con $7x + 1$), $f(x)$ ha quindi una sola radice positiva.

**1.16 –** Posto
$f(x) = x^n + px + q$ è $f'(x) = nx^{n-1} + p$; per $n$ pari $f'(x) = 0$ per $x = \sqrt[n-1]{\dfrac{p}{n}}$ e quindi per VIII.3.2 vi sono al più due radici di $f(x)$; per $n$ dispari $f'(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt[n-1]{\dfrac{p}{n}}$ e quindi vi possono essere al più tre radici.



**1.17 –** $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = ae^{ax} - b$ e $f'(x) = 0$ per $x = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{b}{a}$; se $\dfrac{b}{a} \leq 1$, $f(x)$ è sempre crescente per $x > 0$: nessuna radice; se $\dfrac{b}{a} > 1$ per $x = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{b}{a}$ si ha un minimo con $f\left(\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{b}{a}\right) = \dfrac{b}{a}\left(1 - \ln\dfrac{b}{a}\right)$ da cui se $\dfrac{b}{a} < e$ si hanno due radici, se $\dfrac{b}{a} = e$ una radice, se $\dfrac{b}{a} > e$ nessuna radice.

**∘ 1.18 –** 1) I casi $a = 1$, $b \in \mathbb{R}$; $a > 0$, $b = 0$ sono ovvi. Sia ora $b \neq 0$, $a \neq 1$.

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \begin{cases} +\infty, & b > 0 \\ -\infty, & b < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases},$$

$$F'(x) = \ln a - \frac{b}{x}, \ F'(x) = 0 \text{ per } x = \frac{b}{\ln a}:$$

se $b > 0, a < 1$ oppure $b < 0, a > 1$ essendo $\dfrac{b}{\ln a} < 0$ si ha una sola radice; altrimenti è

$$\frac{b}{\ln a} > 0 \text{ e } F\left(\frac{b}{\ln a}\right) = b\left(1 - \ln\frac{b}{\ln a}\right),$$

se $b > 0$, $a > 1$ per $b < e\ln a$ nessuna radice, per $b = e\ln a$ una radice, per $b > e\ln a$ due radici; in modo analogo si procede per $b < 0, 0 < a < 1$.

2) Poiché tutti e soli punti comuni ai diagrammi di una funzione e della sua inversa stanno sulla retta $y = x$ si ha che le due equazioni hanno le stesse soluzioni e dal punto 1) con $b = 1$ si deduce il numero di tali soluzioni.

**∘ 1.19 –** Per la continuità di $f$, esiste almeno un punto $\xi \in (a_1, b_1)$ ove $f(\xi) = 0$. Supponiamo che esistano $\xi_1, \xi_2$ con
$a_1 < \xi_1 < \xi_2 < b_1$ e $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$; il punto $(\xi_1, f(\xi_1))$ è al di sopra della corda congiungente i punti $(a_1, f(a_1))$, $(\xi_2, f(\xi_2))$, contro l'ipotesi di convessità.

Per ogni $n$, $f(x_n) < 0$, infatti: $f(x_0) = f(a_1) < 0$ per ipotesi; poichè $x_{n+1}$ è l'ascissa dell'intersezione della corda congiungente i punti $(x_n, f(x_n))$ e $(b_1, f(b_1))$ con l'asse $x$, se $f(x_n) < 0$ la convessità di $f$ implica che $f(x_{n+1}) < 0$.
Ne segue immediatamente che la successione $\{x_n\}$ è monotona non decrescente.
Detto $\xi = \lim_{x\to+\infty} x_n$, è $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$ e dalla formula di ricorrenza si ha $f(\xi) = 0$.

∘ **1.20** – Sia $f(a_1) < 0$. Poichè in $\xi$ la funzione è necessariamente crescente, è $f'(\xi) > 0$; se fosse $f'(\xi) = 0$, per la monotonia di $f'$ (vedi IX.1.2) il punto $\xi$ sarebbe di minimo assoluto contro l'ipotesi che $f(a_1) < 0$.
Allora $f'(x) > 0$ per $x \in [\xi, b_1)$.
$x_{n+1}$ è l'ascissa dell'intersezione della retta tangente al diagramma di $f$ in $x_n$ con l'asse $x$. Si noti che per ogni $n$ è $x_n \geq \xi$, infatti:
$x_0 > \xi$ per come è stato scelto, supponiamo $x_{n-1} \geq \xi$ e di conseguenza $f'(x_{n-1}) > 0$, allora

$$x_n - \xi = \frac{(x_{n-1} - \xi)f'(x_{n-1}) - [f(x_{n-1}) - f(\xi)]}{f'(x_{n-1})} =$$

$$= \frac{(x_{n-1} - \xi)}{f'(x_{n-1})}[f'(x_{n-1}) - f'(c)]$$

con $\xi < c < x_{n-1}$, la monotonia di $f'$ implica allora $x_n - \xi \geq 0$.
Quindi $f(x_n) \geq 0$ e $x_{n+1} \leq x_n$; esiste quindi il limite di $\{x_n\}$ e da (*) segue che tale limite è $\xi$.

**1.21** – $$x_{n+1} - \xi = x_n - \xi - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{(x_n - \xi)f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} =$$

$$= \frac{f''(r)(x_n - \xi)^2}{2f'(x_n)}$$

con $\xi < r < x_n$ (formula di Taylor).

**1.22** – Poichè $f$ è convessa su $[1,2]$ e $f(1) = -1$, $f(2) = 2 - \ln 2 > 0$, per IX.1.19 esiste uno e uno solo zero $\xi$ di $f$ in $(1,2)$.



Poiché

$$\max\{f''(x) : x \in [1,2]\} = 1$$

$$\min\{f'(x) : x \in [1,2]\} = 2$$

per IX.1.20 è $x_{n+1} - \xi \leq \frac{1}{4}(x_n - \xi)^2$ e, iterando,

$$x_{n+1} - \xi \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1} \cdot (x_0 - \xi)^{2n} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1};$$

perché sia $4^{2n-1} > 10^3$ basta $n = 3$.

**1.23** – $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $f'(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{x}$; in $x = 4$ $f(x)$ ha massimo con $f(4) = 2\ln 2 - 2 < 0$, quindi $f(x)$ è sempre negativa.

**1.24** – $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$; in $x = 1$ si ha il minimo assoluto ed è $f(1) = 0$, quindi $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $x \neq 1$.

**1.25** – $\lim_{x\to0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $f(x)$ ha almeno uno zero; $f'(x) = 2(\ln x + 1 - x)$ si annulla solo per $x = 1$, $f'(x) < 0$ per $x \neq 1$, quindi, essendo $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ per $0 < x < 1$, $f(x) < 0$ per $x > 1$.

**1.26** – $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$, $f(0) = 0$, $f'(x) = 2x + 1 - e^x$; $f'(x)$ si annulla per $x = 0$ e $x = \alpha$ con $\alpha > 1$ (questo risultato si ottiene confrontando $e^x$ e $2x+1$); poiché per $x = 0$ si ha un minimo e per $x = \alpha$ un massimo, $f(x) > 0$ per $x < 0$ e $0 < x < \beta$ con $\beta > \alpha$.

**1.27** – $F(t) = \text{Ch}\, t - 1 - 2t\text{Sh}\, t$ con $t > 0$, $\lim_{t\to0^+} F(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F(t) = -\infty$, $F'(t) = -\text{Sh}\, t - 2t\text{Ch}\, t < 0$ per $t > 0$, da cui $F(t) < 0$ e anche $f(x) < 0$.

**1.28** – Per l'esistenza deve essere $x \neq -1$ ed $e^x > 2x + 1$, cioè $x < 0, x > a$ con $1 < a < 2$ (fig. 1).
Il numeratore è negativo per $\frac{x}{2} \leq \ln|x+1|$, cioè per $x \leq b$,

$0 \leq x \leq c$ con $-2 < b < -1$, $c < 2$ (fig. 2); la soluzione è $x \leq b, a \leq x \leq c$.

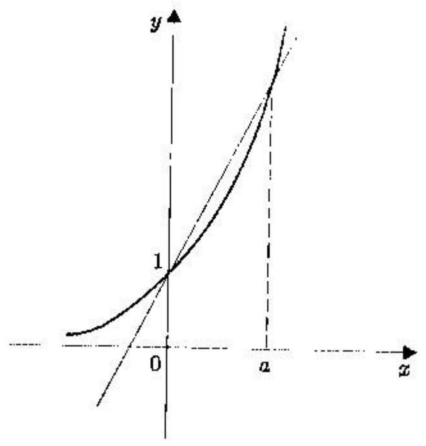



Fig. 1

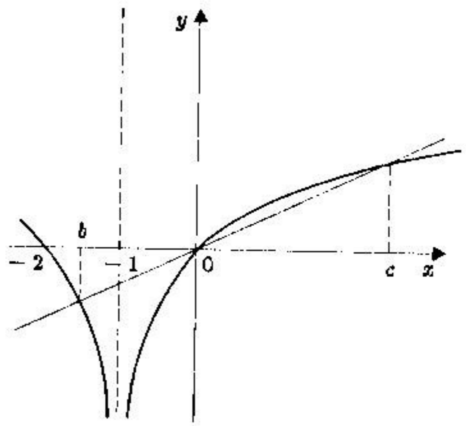
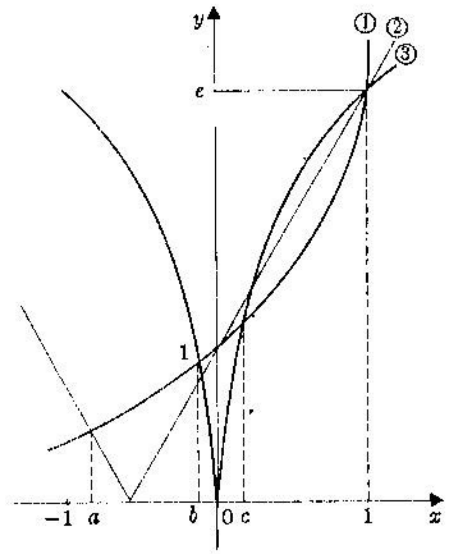



Fig. 2

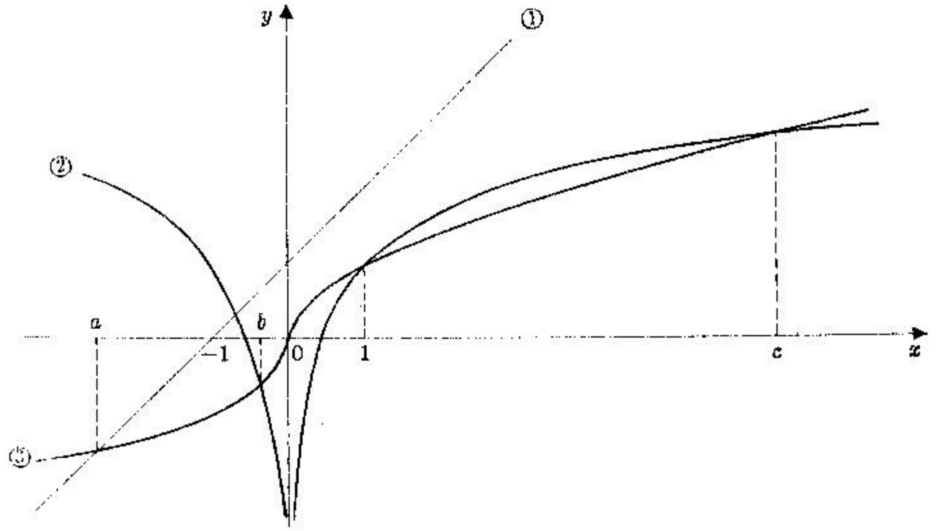
**1.29** – Per l'esistenza deve essere $x < a, 0 < x < 1$ con $-1 < a < (1-e)^{-1}$; il numeratore è negativo per $e^x < e\sqrt{|x|}$, cioè per $x < b$, $c < x < 1$ con $(1-e)^{-1} < b < 0, 0 < c < \frac{1}{2}$;



la soluzione è $x < a, c < x < 1$. (Vedi figura, ove **1**, **2**, **3** sono rispettivamente i diagrammi di $e^x, |(e-1)x - 1|, e\sqrt{|x|}$ ).




**1.30** – Per l'esistenza deve essere $x \neq 0, 1, b, c, x > a$ con $a < -2$,




$-1 < b < 0, c > e^3$ (vedi figura); il denominatore è positivo per $b < x < 0, 0 < x < 1, x > c$, il numeratore è positivo per $-1 < x < 0$, $x > 1$; la soluzione è $a < x < -1$, $b < x < 0$, $x > c$. (**1**, **2**, **3** sono i diagrammi di $x + 1, \ln|x| + 1, \sqrt[5]{x}$).

**1.31** – 1) $f(x) = x^3\left(-\frac{1}{2x^2} - o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = -\frac{1}{2}x + o(1)$ per $x \to \pm\infty$ la retta $y = -\frac{1}{2}x$ è asintoto obliquo; $x = 0$ è asintoto verticale.

2) $f(x) = x^2\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -x + \frac{1}{2} + o(1)$ per $x \to \pm\infty$ la retta $y = -x + \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $x = 0$ è asintoto verticale.

3) $\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{|x|}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \to 3$ per $x \to +\infty$,
$f(x) - 3x = \sqrt{x^2+1} - x \to 0$ per $x \to +\infty$,
la retta $y = 3x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$;
$\frac{f(x)}{x} \to 1$ per $x \to -\infty$, $f(x) - x = x + \sqrt{x^2+1} \to 0$ per $x \to -\infty$; $y = x$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

**1.32** – $\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \pm\infty$, $x = -1$ asintoto verticale;
$f(x) = x - 1 + \frac{1 + \sin x^2}{x+1}$, $y = x - 1$ asintoto obliquo.

**1.33** – Se $\mathrm{gr}P \le \mathrm{gr}Q$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$, non si hanno asintoti obliqui.
Se $\mathrm{gr}P > \mathrm{gr}Q$, $f(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$ con $\mathrm{gr}P_2 < \mathrm{gr}Q$, si ha un asintoto obliquo se e solo se $\mathrm{gr}P_1 = 1$ e $y = P_1(x)$ è in tale caso l'asintoto.

**1.34** – Per esempio

$$f(x) = mx - \frac{\cos x}{x}.$$

## § 2 – Studio dell'andamento di funzioni reali di variabile reale.

**2.1** – $E(f) = \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$;
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$;
$Z(f) = \{-2, 0, 1\}$, $P(f) = \{x : -2 < x < 0 | x > 1\}$;



$f'(x) = x^2(5x^2 + 4x - 6)$, $E(f') = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = +\infty$;

$Z(f') = \left\{-\frac{2+\sqrt{34}}{5}, 0, \frac{\sqrt{34}-2}{5}\right\}$,

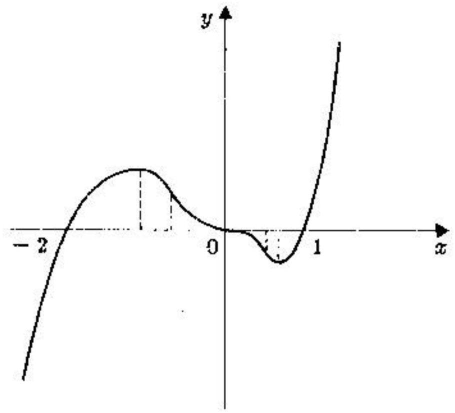
$P(f') = \left\{x : x < -\frac{2+\sqrt{34}}{5} \middle| x > \frac{\sqrt{34}-2}{5}\right\}$,

$x = -\frac{2+\sqrt{34}}{5}$ punto di massimo, $x = 0$ punto di flesso discendente a tangente orizzontale; $x = \frac{\sqrt{34}-2}{5}$ punto di minimo;
$f''(x) = 4x(5x^2 + 3x - 3)$, $E(f'') = \mathbb{R}$,

$$Z(f'') = \left\{-\frac{3+\sqrt{69}}{10}, 0, \frac{\sqrt{69}-3}{10}\right\},$$

$$P(f'') = \left\{x : -\frac{3+\sqrt{69}}{10} < x < 0 \middle| x > \frac{\sqrt{69}-3}{10}\right\},$$

$x = -\frac{3+\sqrt{69}}{10}$ punto di flesso ascendente, $x = \frac{\sqrt{69}-3}{10}$ punto di flesso discendente.



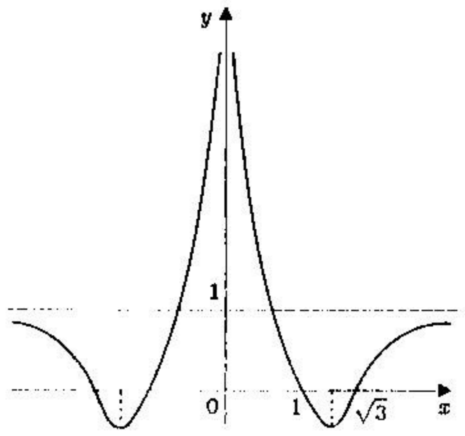

**2.2** – $E(f) = \mathbb{R} - \{0\}, f \in \mathcal{C}(E(f)), f(x) = f(-x)$ funzione pari, studiamo per $x > 0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^-$, $y = 1$ asintoto orizzontale, $x = 0$ asintoto verticale; $Z(f) = \{1, \sqrt{3}\}$,
$P(f) = \{x : 0 < x < 1 | x > \sqrt{3}\}$; $f'(x) = 4 \cdot \frac{2x^2-3}{x^5}$,

$E(f') = E(f),\ Z(f') = \left\{\sqrt{\frac{3}{2}}\right\},\ P(f') = \left\{x : x > \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$,

$x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ punto di minimo, $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{3}$; $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$,

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0^+$; $f''(x) = 12\frac{5-2x^2}{x^6}$, $E(f'') = E(f)$,

$Z(f'') = \left\{\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}, P(f'') = \left\{x : 0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}}\right\} : x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ punto di flesso discendente.




**2.3** – $E(f) = \mathbb{R} - \{0\}, f \in C(E(f)), f$ è pari, studiamo per $x > 0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $Z(f) = \{1\}$,

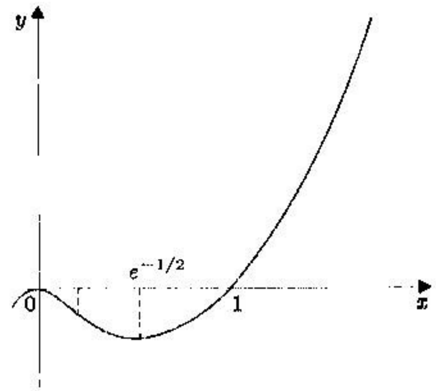
$P(f) = \{x : x > 1\}$; $f'(x) = x(2\ln|x| + 1)$, $E(f') = E(f)$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0^-$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$; $Z(f') = \{e^{-1/2}\}$, $P(f') =$ $= \{x : x > e^{-1/2}\}$, $x = e^{-1/2}$ punto di minimo, $f(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2\,e}$;

$f''(x) = 2\ln|x| + 3$ , $E(f'') = E(f), Z(f'') = \{e^{-3/2}\}$,

$P(f'') = \{x : x > e^{-3/2}\}$, $x = e^{-3/2}$ punto di flesso ascendente,

$f(e^{-3/2}) = -\frac{3}{2e^3}$; $f$ può essere prolungata con continuità nell'origine e tale prolungamento è derivabile.






**2.4** – $E(f) = \{x : x < -1 | x \geq 1\}$, $f \in C(E(f))$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty, f(1) = 0, Z(f) = \{1\}, P(f) = \{x : x > 1\}$,

$x = 1$ punto di minimo, $x = -1$ asintoto verticale, $y = x - 1$ asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$; $f'(x) = \frac{x^2 + x - 1}{\sqrt{(x^2-1)(x+1)^2}}$,

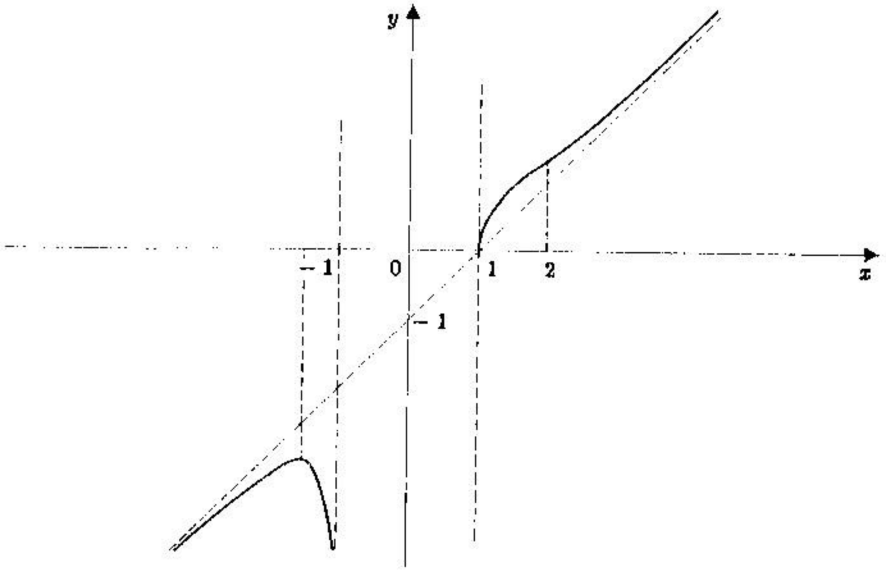
$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$

$E(f') = E(f) - \{1\},\ Z(f') = \left\{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$,

$P(f') = \left\{x : x < -\frac{1+\sqrt{5}}{2} | x > 1\right\}$ , $x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ punto di massimo;

$f''(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{\{(x^2-1)(x+1)^2\}^{3/2}}, E(f'') = E(f')$ , $Z(f'') = \{2\}$,

$P(f'') = \{x : x > 2\}$, $x = 2$ punto di flesso ascendente.



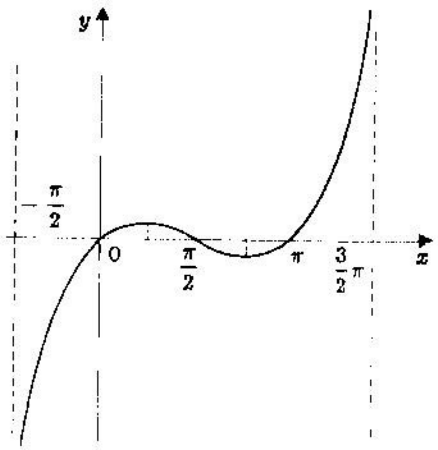

**2.5** – $E(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ con $k \in \mathbb{Z}$, $f \in C(E(f))$, $f$ è periodica di periodo $2\pi$, inoltre $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, si può quindi limitare lo studio all'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ ; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\lim_{x\to(3\pi/2)^-} f(x) = +\infty$, $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale, $Z(f) = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$,

$P(f) = \left\{x : \pi < x < \frac{3}{2}\pi\right\}$;

$f'(x) = -2\frac{\sin^2 x + \sin x - 1}{1 + \sin x}$

$E(f') = E(f)$ , $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$,

$Z(f') = \left\{\pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$,






$P(f') = \left\{x : \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{3}{2}\pi\right\}$,

$x = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ punto di minimo;

$f''(x) = -2\cos x\frac{(1+\sin x)^2 + 1}{(1+\sin x)^2}$

$E(f'') = E(f)$, $Z(f'') = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$,

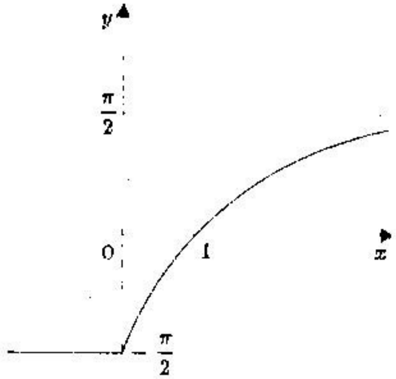
$P(f'') = \left\{x : \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi\right\}$, $x = \frac{\pi}{2}$ punto di flesso ascendente,

$y = -x + \frac{\pi}{2}$ tangente di flesso.

**2.6** – $E(f) = \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{R})$, $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\frac{\pi}{2}$, $y = \mp\frac{\pi}{2}$ asintoti orizzontali rispettivamente per $x \to \mp\infty$; $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(1 + \frac{x}{|x|}\right)$, $E(f') = \mathbb{R} - \{0\}$, $Z(f') = \{x : x < 0\}$, $P(f') = \{x : x > 0\}$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2$, $x = 0$ punto angolare; si può concludere che

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{per} \quad x \le 0 \\ 2\arctan x - \frac{\pi}{2} & \text{per} \quad x > 0 \end{cases}$$

(a questa conclusione si poteva giungere anche per via algebrica)



**2.7** – $E(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}, f \in \mathcal{C}(E(f)), \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1^{\mp}$,
$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \mp\infty, \lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$,
$y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty, x = -1, x = 1$ sono asintoti verticali;
$Z(f) = \{2, 3\}, P(f) = \{x : x < -1 | 1 < x < 2 | x > 3\}$;

$$f'(x) = \frac{5x^2 - 14x + 5}{(x^2-1)^2}, E(f') = E(f),$$

$$Z(f') = \left\{\frac{7 - 2\sqrt{6}}{5}, \frac{7 + 2\sqrt{6}}{5}\right\},$$

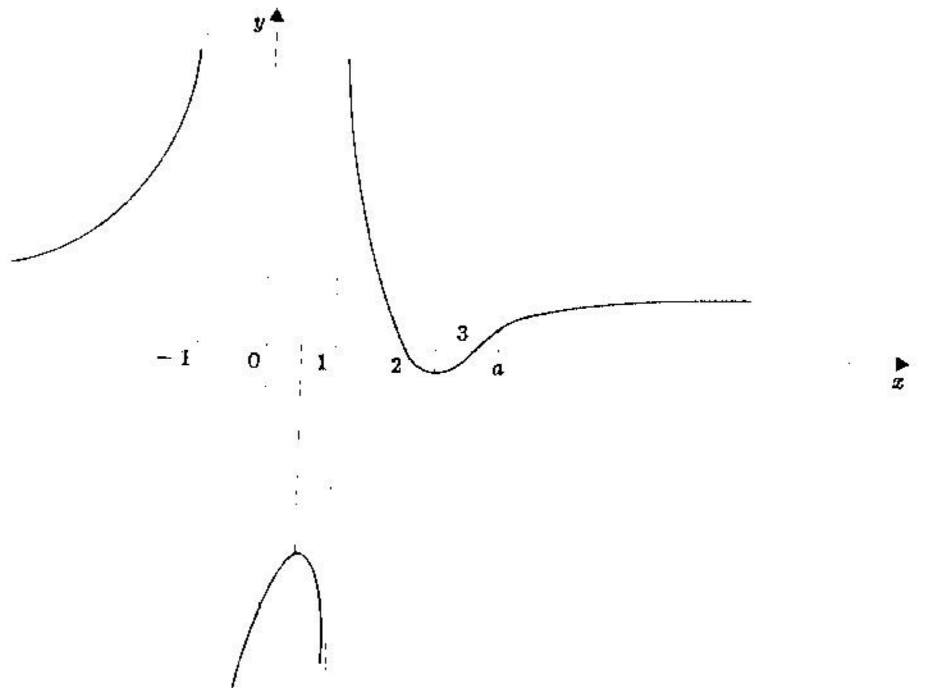
$$P(f') = \left\{x : x < \frac{7 - 2\sqrt{6}}{5}, x \neq -1 \,\middle|\, x > \frac{7 + 2\sqrt{6}}{5}\right\},$$

$x = \dfrac{7 - 2\sqrt{6}}{5}$ punto di massimo;

$x = \dfrac{7 + 2\sqrt{6}}{5}$ punto di minimo;

$$f''(x) = -2\frac{5x^3 - 21x^2 + 15x - 7}{(x^2-1)^3}, E(f'') = E(f), Z(f'') = \{a\}$$

con $a > 3$, $P(f'') = \{x : x < -1 | 1 < x < a\}$, $x = a$ punto di flesso discendente.





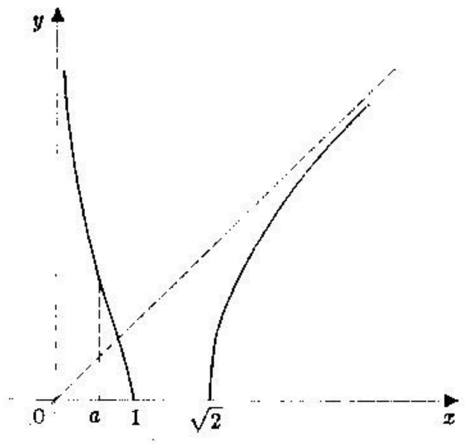

**2.8** – $E(f) = \{x : x \leq -\sqrt{2} | -1 \leq x < 0 \mid 0 < x \leq 1 | x \geq \sqrt{2}\}$,
$f \in \mathcal{C}(E(f))$, $f$ è dispari, studiamo per $x > 0$;
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, f(1) = f(\sqrt{2}) = 0$,
$Z(f) = \{1, \sqrt{2}\}$ $P(f) = \{x : 0 < x < 1 | x > \sqrt{2}\}$, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ punti di minimo, $x = 0$ asintoto verticale, $y = x$ asintoto obliquo;

$$f'(x) = \frac{x^4 - 2}{x^2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}},$$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty, \lim_{x \to \sqrt{2}^+} f'(x) = +\infty, E(f') = E(f) - \{1, \sqrt{2}\}$,
$Z(f') = \emptyset, P(f') = \{x : x > \sqrt{2}\}$;

$$f''(x) = \frac{-3x^6 + 12x^4 - 18x^2 + 8}{x^3(x^4 - 3x^2 + 2)^{3/2}},$$

$E(f'') = E(f'), Z(f'') = \{a\}$ con $0 < a < 1$,
$P(f'') = \{x : 0 < x < a\}$, $x = a$ punto di flesso discendente.




**2.9** – $E(f) = \mathbb{R} - \{-e, -1, 0, 1, e\}$, $f \in \mathcal{C}(E(f))$, $f$ è pari, studiamo per $x > 0$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$, $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to e} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$, $Z(f) = \{e^{1/2}\}$,
$P(f) = \{x : 0 < x < 1 | 1 < x < e^{1/2}\}$, $x = 1$, $x = e$ asintoti verticali, $y = 0$ asintoto orizzontale;

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln x (\ln x - 1)}, E(f') = E(f), \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty;$$

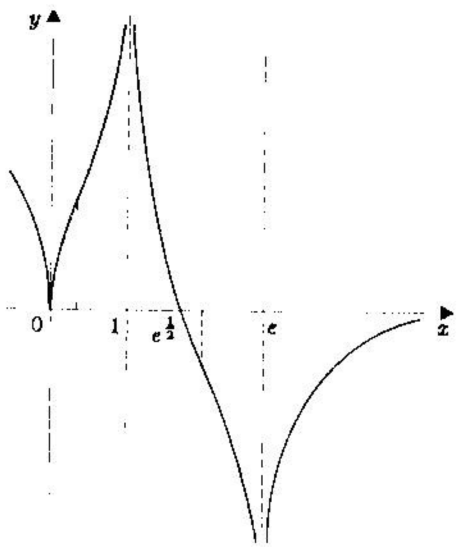
$Z(f') = \emptyset$, $P(f') = \{x : 0 < x < 1 | x > e\}$;

$f''(x) = \dfrac{1 - \ln x - \ln^2 x}{x^2 \ln^2 x(\ln x - 1)^2}$, $E(f'') = E(f)$,

$Z(f'') = \left\{ e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right\}$,

$P(f'') = \{x : e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} < x < 1 | 1 < x < e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\}$,

$x = e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ punto di flesso ascendente, $x = e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ punto di flesso discendente; la funzione può essere prolungata con continuità in $x = 0$ ed in tale punto presenta una cuspide.




**2.10** – $E(f) = \mathbb{R} - \{-1\}, f \in C(E(f))$,

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to -1^{\mp}} f(x) = -\dfrac{1}{2} \mp \pi$,

$y = -\dfrac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale per $x \to \mp\infty$;

$f'(x) = -2x \cdot \dfrac{2x+1}{(1+x^2)^2}$, $E(f') = E(f)$, $\lim_{x \to -1} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$,

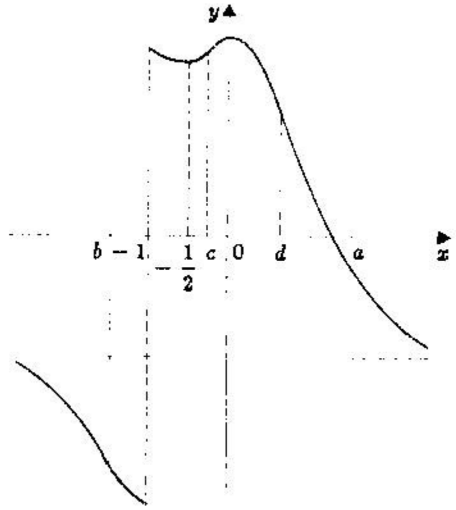


$Z(f') = \left\{-\dfrac{1}{2}, 0\right\}$, $\quad P(f') = \left\{x : -\dfrac{1}{2} < x < 0\right\}$,

$x = -\dfrac{1}{2}$ punto di minimo, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2\arctan 3$, $x = 0$ punto di massimo, $f(0) = \dfrac{\pi}{2} + 1$, si può anche concludere che $Z(f) = \{a\}$ con $2 < a < 3$, $P(f) = \{x : -1 < x < a\}$;

$f''(x) = 2 \cdot \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{(1+x^2)^3}$, $E(f'') = E(f)$, studiando il segno del numeratore si ottiene $Z(f'') = \{b, c, d\}$ con $-2 < b < -1$, $-\dfrac{1}{2} < c < 0$, $0 < d < 1$,

$P(f'') = \{x : b < x < -1 | -1 < x < c | x > d\}$, $x = b$, $x = d$ punti di flesso ascendente, $x = c$ punto di flesso discendente.




**2.11** – $E(f) = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$, $f \in C(E(f))$, $f$ è dispari, studiamo per $x \geq 0$; $f(1) = 0$, $Z(f) = \{0, 1\}$,
$P(f) = \{x : 0 < x < 1\}$, $x = 1$ punto di minimo;

$f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1 - 2x^2}{|2x^2 - 1| \cdot \sqrt{1 - x^2}}$ $\lim_{x \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mp}} f'(x) = \pm 2\sqrt{2}$,

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$,

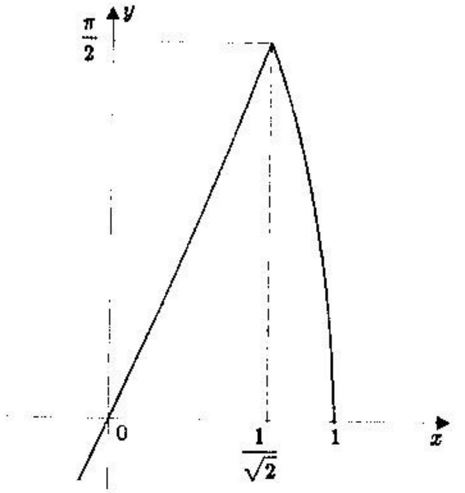
$E(f') = \left\{x : 0 \leq x < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \middle| \dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 1\right\}$, in $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ si ha un punto angolare,

$Z(f') = \emptyset, P(f') = \left\{x : 0 \le x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}, x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ punto di massimo, $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;

$$f''(x) \begin{cases} \dfrac{2x}{(1-x^2)^{3/2}} & \text{per} \quad 0 \le x < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{2x}{(1-x^2)^{3/2}} & \text{per} \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \end{cases},$$

$$E(f'') = \left\{x : 0 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1\right\},$$

$Z(f'') = \{0\}, P(f'') = \left\{x : 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $x = 0$ flesso ascendente, $y = 2x$ tangente di flesso.




**2.12 –** $E(f) = \{x : 0 < x < e^{-1} | x > e^{-1}\}$, $f \in C(E(f))$, per $x \ge 1$ $f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to (e^{-1})^{\mp}} f(x) = \mp\infty$, $x = e^{-1}$ asintoto verticale, $Z(f) = \emptyset$, $P(f) = \{x : x > e^{-1}\}$;

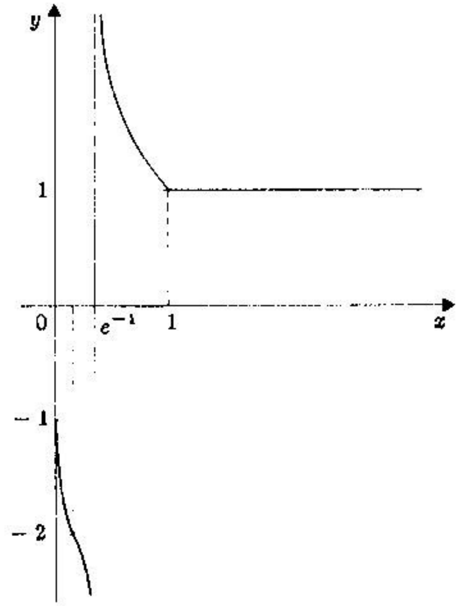
$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2} & \text{per} \quad 0 < x < 1, \quad x \ne e^{-1} \\ 0 & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}$$



$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -2$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 0$, $E(f') = \{x : 0 < x < e^{-1} | e^{-1} < x < 1 | x > 1\}$, in $x = 1$ c'è un punto angolare, $Z(f') = \{x : x > 1\}$, $P(f') = \emptyset$, $x = 1$ punto di minimo,

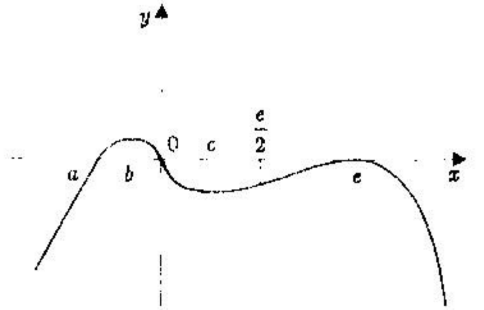
$$f''(x) = \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{3 + \ln x}{x^2(1+\ln x)^3} & \text{per} \quad 0 < x < 1, \quad x \ne e^{-1} \\ 0 & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}$$

$E(f'') = E(f')$, $Z(f'') = \{x : x = e^{-3} | x > 1\}$, $P(f'') = \{x : 0 < x < e^{-3} | e^{-1} < x < 1\}$, $x = e^{-3}$ punto di flesso discendente; la funzione può essere prolungata con continuità in $x = 0$.




**2.13 –** $E(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $f \in C(E(f))$, $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^{\mp}} f(x) = 0^{\pm}$, $Z(f) = \{a, e\}$ con $-1 < a < -e^{-1}$ (vedi IX.1.17), $P(f) = \{x : a < x < 0\}$; $f'(x) = \ln|x| + 1 - \dfrac{2x}{e}$, $E(f') = E(f)$, $Z(f') = \{b, c, e\}$ con $-e^{-1} < b < 0$, $0 < c < 1$ (vedi IX.1.17), $P(f') = \{x : x < b | c < x < e\}$, $x = b$, $x = e$ punti di massimo, $x = c$ punto di minimo, $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$; $f''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{e}$, $E(f'') = E(f)$, $Z(f'') = \left\{\dfrac{e}{2}\right\}$,

$P(f'') = \left\{x : 0 < x < \frac{e}{2}\right\}$, $x = \frac{e}{2}$ punto di flesso discendente; la funzione può essere prolungata con continuità in $x = 0$ ed il prolungamento presenta in tale punto un flesso a tangente verticale.




2.14 – $E(f) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$, $f \in C(E(f))$, $f$ è dispari, studiamo per $x \geq 0$; $\lim_{x\to 1^\mp} f(x) = 2 \mp \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f(0) = 0$,

$y = 2x$ asintoto obliquo; $f'(x) = \frac{(x^2-1)(2x^2-1)}{(x^2-1)^2+x^2}$,

$E(f') = E(f)$, $\lim_{x\to 1^\mp} f'(x) = 0^\mp$, $Z(f') = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$,

$P(f') = \left\{x : 0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}} | x > 1\right\}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ punto di massimo; dal segno di $f'(x)$ si deduce che $Z(f) = \{0\}$,

$P(f) = \{x : 0 < x < 1 | x > 1\}$;

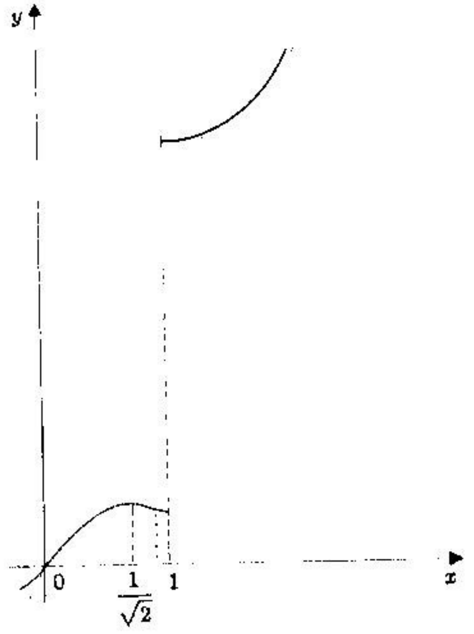
$f''(x) = 2x \cdot \frac{x^4+2x^2-2}{\{(x^2-1)^2+x^2\}^2}$,

$E(f'') = E(f)$, $Z(f'') = \left\{0, \sqrt{\sqrt{3}-1}\right\}$,

$P(f'') = \left\{x : \sqrt{\sqrt{3}-1} < x < 1 | x > 1\right\}$,

$x = 0$ punto di flesso discendente, $x = \sqrt{\sqrt{3}-1}$ punto di flesso ascendente.






2.15 – $E(f) = \{x : -\pi \leq x \leq \pi\}$, $f \in C(E(f))$, $Z(f) = \{-\pi, 0, \pi\}$, $P(f) = \{x : 0 < x < \pi\}$, $x = -\pi$ punto di massimo, $x = \pi$ punto di minimo;

$f'(x) = \frac{e^x(3\sin x + \cos x)}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$, $\lim_{x\to-\pi^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = -\infty$,

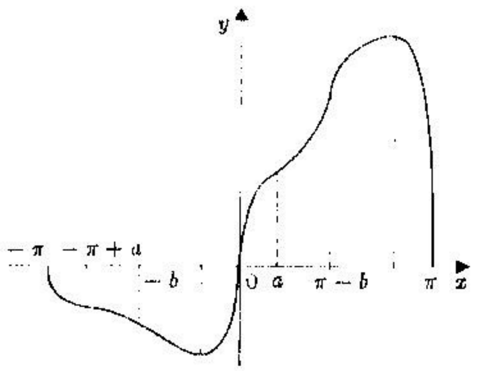
$E(f') = E(f) - \{-\pi, 0, \pi\}$,

$Z(f') = \left\{-\arctan\frac{1}{3}, \pi - \arctan\frac{1}{3}\right\}$,

$P(f') = \left\{x : -\arctan\frac{1}{3} < x < \pi - \arctan\frac{1}{3}\right\}$, $x = -\arctan\frac{1}{3}$ punto di minimo, $x = \pi - \arctan\frac{1}{3}$ punto di massimo, $x = 0$ punto di flesso a tangente verticale;

$$f''(x) = \frac{2e^x(3\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x)}{9\sqrt[3]{\sin^5 x}},$$

$E(f'') = E(f')$, posto $a = \arctan\frac{\sqrt{21}-3}{6}$, $b = \arctan\frac{3+\sqrt{21}}{6}$ è $Z(f'') = \{-\pi+a, -b, a, \pi-b\}$, $x = -\pi+a$ e $x = \pi-b$ sono punti di flesso discendente, $x = -b$ e $x = a$ sono punti di flesso ascendente.




**2.16** – $E(f)=\{x:0<x<1|x>1\},\ f\in C(E(f))$,

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0^+,\ \lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, Z(f)=\{e^{-1}\}$,
$P(f)=\{x:0<x<e^{-1}|e^{-1}<x<1|x>1\}$, $x=e^{-1}$ punto di minimo assoluto, $x=1$ asintoto verticale;

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln^2 x+\ln x-1}{\ln^2 x} & \text{per} \quad 0<x<e^{-1}, \quad x>1\\ -\dfrac{\ln^2 x+\ln x-1}{\ln^2 x} & \text{per} \quad e^{-1}<x<1\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=1,\ \lim_{x\to(e^{-1})^\mp} f'(x)=\mp 1$,

$E(f')=\{x:0<x<e^{-1}|e^{-1}<x<1|x>1\}$,
in $x=e^{-1}$ c'è un punto angolare,

$$Z(f')=\left\{e^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}, e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\},$$

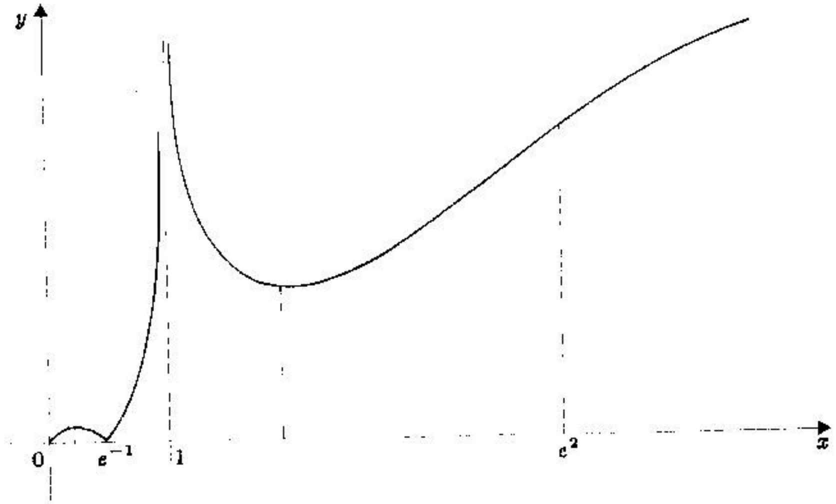
$$P(f')=\left\{x:0<x<e^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}|e^{-1}<x<1|x>e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\},$$

$x=e^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ è punto di massimo, $x=e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ è punto di minimo;



$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\ln x}{x\ln^3 x} & \text{per} \quad 0<x<e^{-1}, \quad x>1\\ \dfrac{\ln x-2}{x\ln^3 x} & \text{per} \quad e^{-1}<x<1\end{cases}$$

$E(f'')=E(f'), Z(f'')=\{e^2\}$,
$P(f'')=\{x:e^{-1}<x<1|1<x<e^2\}$, $x=e^2$ punto di flesso discendente, $f(e^2)=\dfrac{3}{2}e^2$; la funzione è prolungabile con continuità in $x=0$.

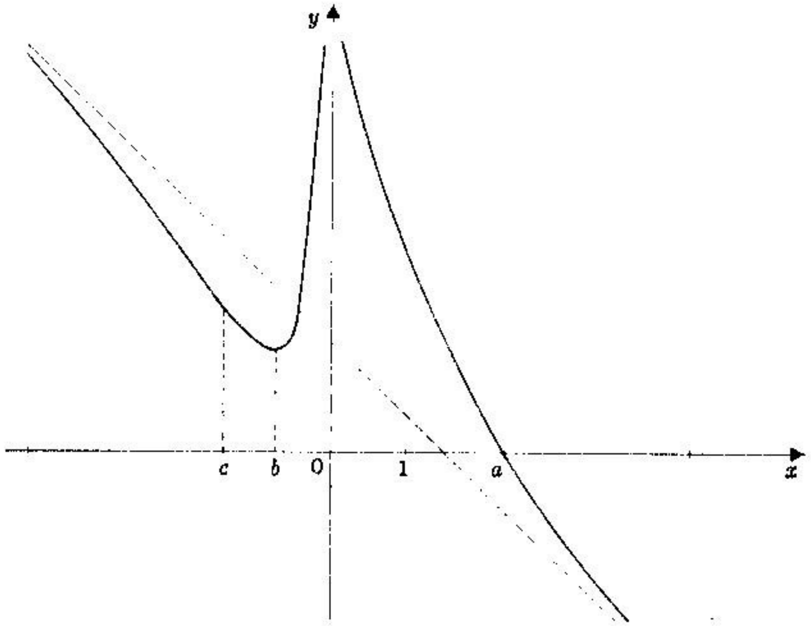



**2.17** – $E(f)=\mathbb{R}-\{0\},\ f\in C(E(f)),\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\mp\infty$,
$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $x=0$ asintoto verticale, $y=-x+\mathrm{Ch}1$ asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$; posto $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=t$, dal confronto dei diagrammi di $\mathrm{Ch}(1+t)$ e $\dfrac{1}{t^3}$ (vedi diagramma A 10) si ottiene $Z(f)=\{a\}$ con $a>2$, $P(f)=\{x:x<0|0<x<a\}$;

$f'(x)=-1-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\mathrm{Sh}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$, $E(f')=E(f)$, confrontando i diagrammi di $\mathrm{Sh}(1+t)$ e $-\dfrac{3}{t^4}$ si ottiene $Z(f')=\{b\}$ con $-1<b<0$, $P(f')=\{x:b<x<0\}$, $x=b$ punto di minimo;

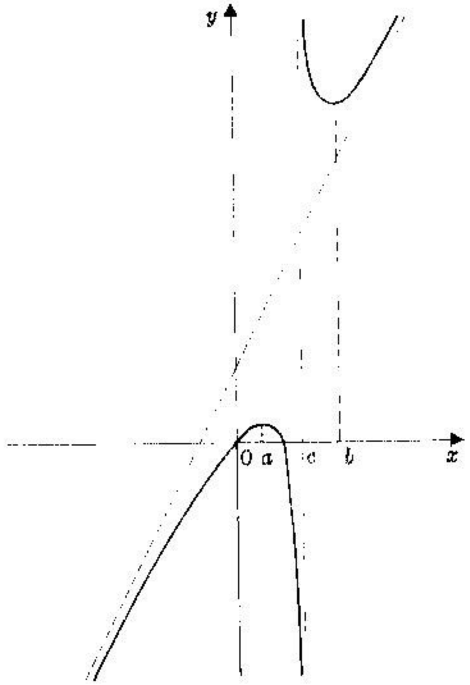
$$f''(x)=\frac{4}{9\sqrt[3]{x^7}}\mathrm{Sh}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)+\frac{1}{9\sqrt[3]{x^8}}\mathrm{Ch}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right),$$

$E(f'') = E(f)$, confrontando i diagrammi di $\mathrm{Th}(1+t)$ e $-\dfrac{t}{4}$ si ottiene $Z(f'')=\{c\}$ con $c<-1$, $P(f'')=\{x : c<x<0|x>0\}$, $x=c$ punto di flesso ascendente.




**2.18** – $E(f) = \mathbb{R} - \{\ln(1+\sqrt{2})\}$, $f \in C(E(f))$, $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to(\ln(1+\sqrt{2}))^\pm} f(x) = \pm\infty$, $x = \ln(1+\sqrt{2})$ asintoto verticale, $y = 2x+1$ asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$; $f'(x) = 2 - \dfrac{\mathrm{Ch}x}{(\mathrm{Sh}x-1)^2}$, $E(f') = E(f)$, confrontando i diagrammi di $\mathrm{Ch}x$ e $2(\mathrm{Sh}x-1)^2$ si ottiene $Z(f') = \{a, b\}$ con $0 < a < \ln(1+\sqrt{2})$, $b > \ln(1+\sqrt{2})$, $P(f') = \{x : x < a|x > b\}$, $x = a$ punto di massimo, $x = b$ punto di minimo; poichè $f'(0) = 1$ e $f(0) = 0$, esiste $c$ con $a < c < \ln(1+\sqrt{2})$ tale che $P(f) = \{x : 0 < x < c|x > \ln(1+\sqrt{2})\}$, poichè $f(b) > 0$, $Z(f) = \{0, c\}$; $f''(x) = \dfrac{\mathrm{Sh}^2 x + \mathrm{Sh}x + 2}{(\mathrm{Sh}x-1)^3}$, $E(f'') = E(f)$, $Z(f'') = \emptyset$, $P(f'') = \{x : x > \ln(1+\sqrt{2})\}$.

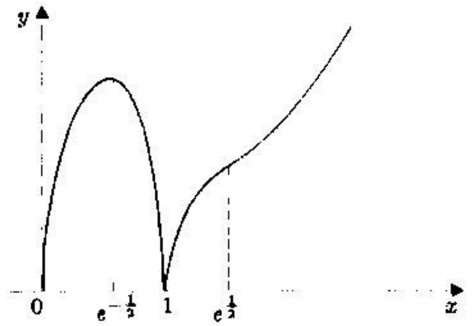





**2.19** – $E(f) = \{x : x > 0\}$, $f \in C(E(f))$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $Z(f) = \{1\}$, $P(f) = \{x : 0 < x < 1|x > 1\}$, $x = 1$ punto di minimo assoluto;

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2\ln x + 1}{2|\ln x|^{1/2}} & \text{per } 0 < x < 1 \\[2ex] \dfrac{2\ln x + 1}{2|\ln x|^{1/2}} & \text{per } x > 1, \end{cases}$$

$\lim_{x\to0^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^\mp} f'(x) = \mp\infty$, $E(f') = \{x : 0 < x < 1|x > 1\}$, in $x = 1$ vi è una cuspide, $Z(f') = \{e^{-1/2}\}$, $P(f') = \{x : 0 < x < e^{-1/2}|x > 1\}$, $x = e^{-1/2}$ è punto di massimo, $f(e^{-1/2}) = \dfrac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$; $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{4x|\ln x|^{3/2}}$, $E(f'') = E(f')$, $Z(f'') = \{e^{1/2}\}$, $P(f'') = \{x : x > e^{1/2}\}$, $x = e^{1/2}$ punto di flesso ascendente; la funzione è prolungabile con continuità in $x = 0$.




**2.20** – $E(f) = \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(E(f))$, $f$ è periodica di periodo $2\pi$, studiamo in $0 \leq x \leq 2\pi$;

$Z(f) = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi, 2\pi\right\}$,

$P(f) = \left\{x : 0 < x < \frac{\pi}{6} \middle| \frac{5}{6}\pi < x < \pi\right\}$;

$f'(x) = (1 - 4\sin x)\cos x$, $E(f') = E(f)$,

$f'(0) = f'(2\pi) = 1$,

$Z(f') = \left\{\arcsin\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\pi\right\}$,

$$P(f') = \left\{x : 0 \leq x < \arcsin\frac{1}{4} \middle| \frac{\pi}{2} < x < \pi - \arcsin\frac{1}{4} \middle| \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi\right\},$$

i punti $x = \arcsin\frac{1}{4}$ e $x = \pi - \arcsin\frac{1}{4}$ sono di massimo,

$f\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) = f\left(\pi - \arcsin\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$, i punti $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$ sono di minimo,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -3$; $f''(x) = -\sin x - 4\cos 2x$,

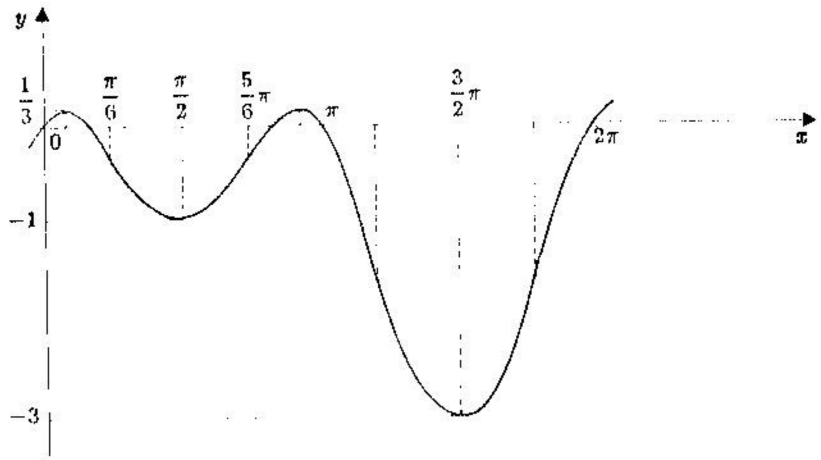
$E(f'') = E(f)$,

$$Z(f'') = \left\{\arcsin\frac{\sqrt{129}-1}{16}, \pi - \arcsin\frac{\sqrt{129}-1}{16}, \pi + \arcsin\frac{1+\sqrt{129}}{16}, 2\pi - \arcsin\frac{1+\sqrt{129}}{16}\right\},$$



$$P(f'') = \left\{x : \arcsin\frac{\sqrt{129}-1}{16} < x < \pi - \arcsin\frac{\sqrt{129}-1}{16} \middle| \pi + \arcsin\frac{1+\sqrt{129}}{16} < x < 2\pi - \arcsin\frac{1+\sqrt{129}}{16}\right\},$$

i punti $x = \arcsin\frac{\sqrt{129}-1}{16}$, $x = \pi + \arcsin\frac{1+\sqrt{129}}{16}$ sono di flesso ascendente, i punti $x = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{129}-1}{16}$, $x = 2\pi - \arcsin\frac{1+\sqrt{129}}{16}$, sono di flesso discendente.




**2.21** – $E(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, $f \in \mathcal{C}(E(f))$, $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim_{x \to 1^\mp} f(x) = \mp\infty$, $x = 1$ asintoto verticale; ponendo $t = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$ e confrontando $t$ con $\ln|t|$ si ottiene $Z(f) = \{a\}$ con $-1 < a < 0$,

$P(f) = \{x : x < a | x > 1\}$; $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-2}{3\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}-1)^2}$,

$\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$, $E(f') = E(f) - \{0\}$, $x = 0$ punto di flesso a tangente verticale, $Z(f') = \{8\}$, $P(f') = \{x : x > 8\}$, $x = 8$ punto di minimo, $f(8) = 1$;

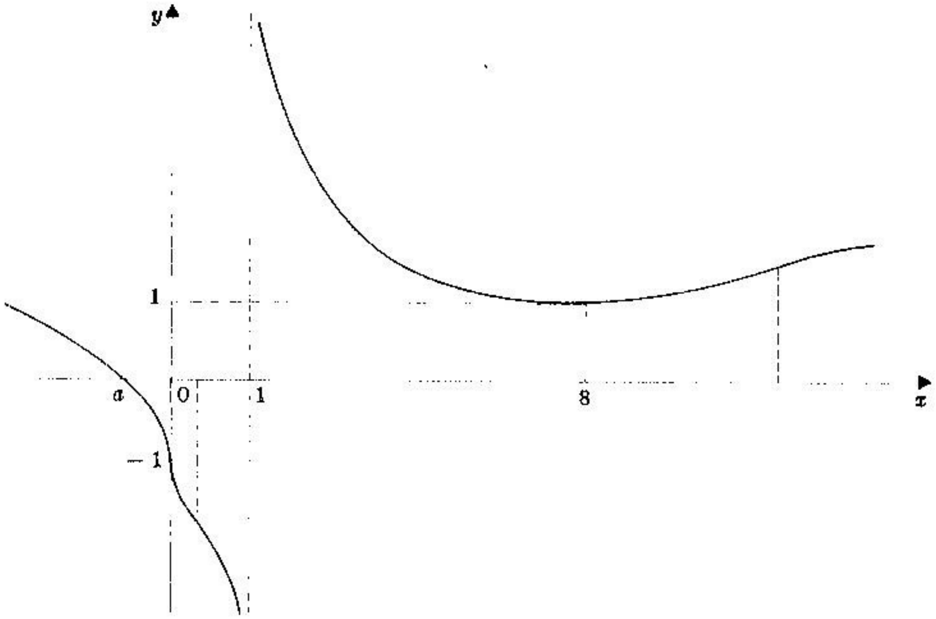
$f''(x) = -\frac{3\sqrt[3]{x^2} - 9\sqrt[3]{x} + 4}{9\sqrt[3]{x^5}(\sqrt[3]{x}-1)^3}$,

$E(f'') = E(f')$,

$$Z(f'') = \left\{ \left(\frac{9-\sqrt{33}}{6}\right)^3, \left(\frac{9+\sqrt{33}}{6}\right)^3 \right\},$$

$$P(f'') = \left\{ x : 0 < x < \left(\frac{9-\sqrt{33}}{6}\right)^3 \middle| 1 < x < \left(\frac{9+\sqrt{33}}{6}\right)^3 \right\},$$

$x = \left(\frac{9-\sqrt{33}}{6}\right)^3$ punto di flesso discendente, $x = \left(\frac{9+\sqrt{33}}{6}\right)^3$ punto di flesso ascendente.

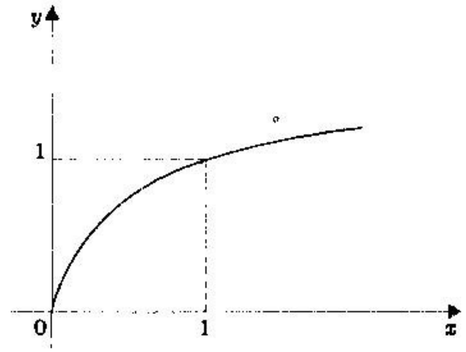



**2.22** – $E(f) = \{x : 0 < x < 1 | x > 1\}$, $f \in C(E(f))$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $Z(f) = \emptyset$, $P(f) = E(f)$; $f'(x) = \dfrac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2}$, $E(f') = E(f)$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1} f'(x) = \dfrac{1}{2}$, $Z(f') = \emptyset$, $P(f') = E(f)$;

$$f''(x) = \frac{2x\ln x + 1 - x^2}{x(x-1)^3},$$

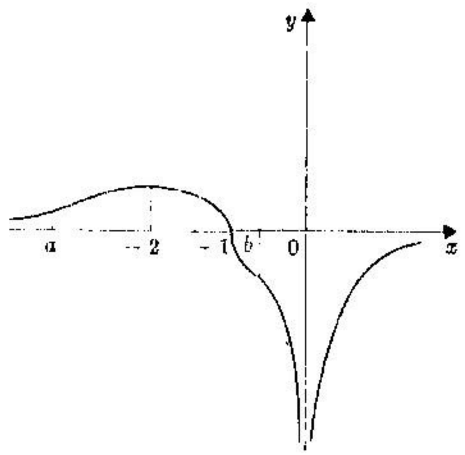
$E(f'') = E(f)$, $Z(f'') = \emptyset$, $P(f'') = E(f)$ (vedi IX.1.25), $\lim_{x\to 1} f''(x) = -\dfrac{1}{3}$; la funzione può essere prolungata con continuità in $x = 0$ e $x = 1$, tale prolungamento risulta derivabile in $x = 1$ ed ivi ammette anche derivata seconda.





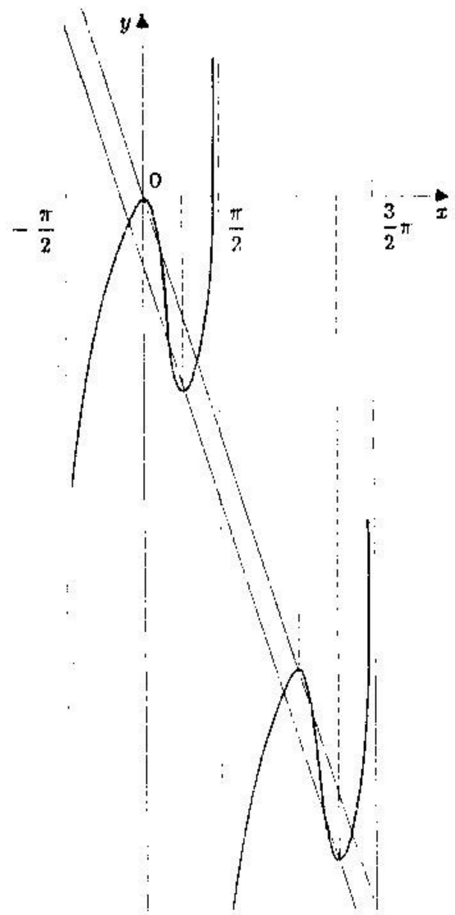

**2.23** – $E(f) = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, $f \in C(E(f))$, $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0^\pm$, $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, $x = 0$ asintoto verticale; confrontando i diagrammi delle funzioni $x \ln|x|$ e $(x+1)\ln|x+1|$ (vedi diagramma A 20) si ottiene $Z(f) = \emptyset$, $P(f) = \{x : x < -1\}$; $f'(x) = \dfrac{\ln|x+1|}{x^2}$, $E(f') = E(f)$, $\lim_{x\to -1} f'(x) = -\infty$, $Z(f') = \{-2\}$, $P(f') = \{x : x < -2 | x > 0\}$, $x = -2$ punto massimo, $f(-2) = \ln 2$; $f''(x) = \dfrac{x - 2(x+1)\ln|x+1|}{x^3(x+1)}$, $E(f'') = E(f)$,

confrontando i diagrammi delle funzioni $\dfrac{x}{2}$ e $(x+1)\ln|x+1|$ si ottiene $Z(f'') = \{a, b\}$ con $-4 < a < -3$, $-1 < b < 0$, $P(f'') = \{x : x < a | -1 < x < b\}$, $x = a$, $x = b$ punti di flesso discendente; la funzione può essere prolungata con continuità in $x = -1$, la funzione così completata ha in $x = -1$ un flesso a tangente verticale.




**2.24** – $E(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}, f \in C(E(f))$, $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{\pm}} f(x) = \mp\infty$, i limiti di $f$ per $x \to \mp\infty$ non esistono, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ asintoti verticali; $f'(x) = \tan^2 x - \tan x$, $E(f') = E(f)$, $Z(f') = \left\{k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$, $P(f') = \left\{x : k\pi + \frac{\pi}{4} < x < (k+1)\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$, $x = k\pi$ punti di massimo con $f(k\pi) = -k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ punti di minimo con $f\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = 1 - \frac{\pi}{4} - k\pi - \frac{1}{2}\ln 2$, i massimi ed i minimi stanno rispettivamente sulle rette $y = -x$ e $y = -x + 1 - \frac{1}{2}\ln 2$; $f''(x) = (1 + \tan^2 x)(2\tan x - 1)$, $E(f'') = E(f)$, $Z(f'') = \left\{\arctan\frac{1}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$, $P(f'') = \left\{x : \arctan\frac{1}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$, $x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$ punti di flesso ascendenti; il segno della funzione si deduce dai risultati precedenti.





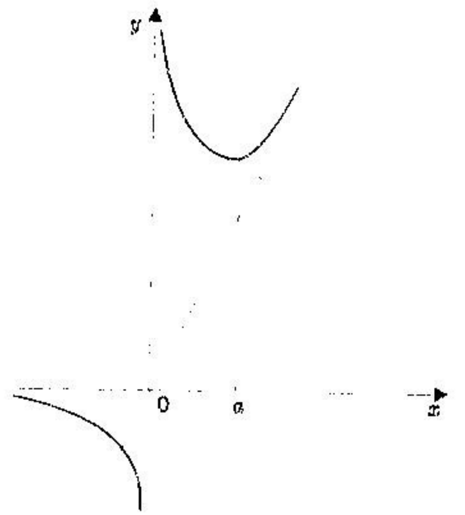

**2.25** – $E(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $f \in C(E(f))$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$, $\lim_{x \to 0^{\mp}} f(x) = \mp\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, $y = 2x$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$, $x = 0$ asintoto verticale, $Z(f) = \emptyset$, $P(f) = \{x : x > 0\}$;

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{Ch}\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^3}\mathrm{Sh}\frac{1}{x^3} - 1 & \text{per} \quad x < 0 \\ \mathrm{Ch}\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^3}\mathrm{Sh}\frac{1}{x^3} + 1 & \text{per} \quad x > 0, \end{cases}$$

$E(f') = E(f)$, ponendo $\frac{1}{x^3} = t$ e confrontando $\mathrm{Ch}t \mp 1$ con $3t\mathrm{Sh}t$ si ottiene $Z(f') = \{a\}$ con $a > 1$, $P(f') = \{x : x > a\}$,

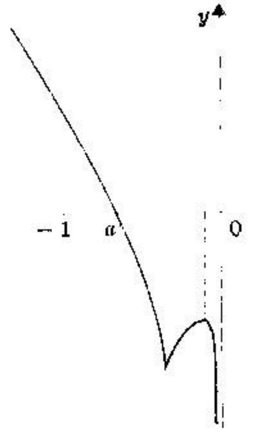
$x = a$ punto di minimo; $f''(x) = \dfrac{6}{x^4}\mathrm{Sh}\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{9}{x^7}\mathrm{Ch}\dfrac{1}{x^3}$,

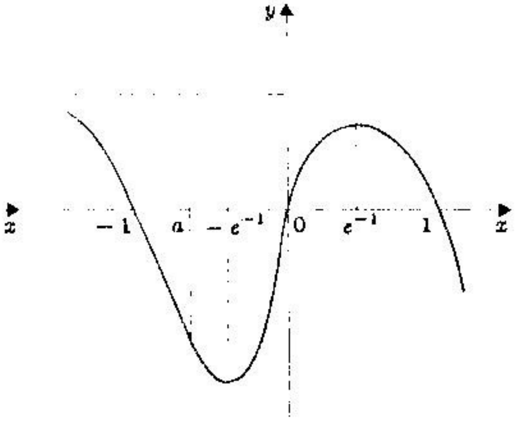
$E(f'') = E(f)$, $Z(f'') = \emptyset$, $P(f'') = \{x : x > 0\}$.



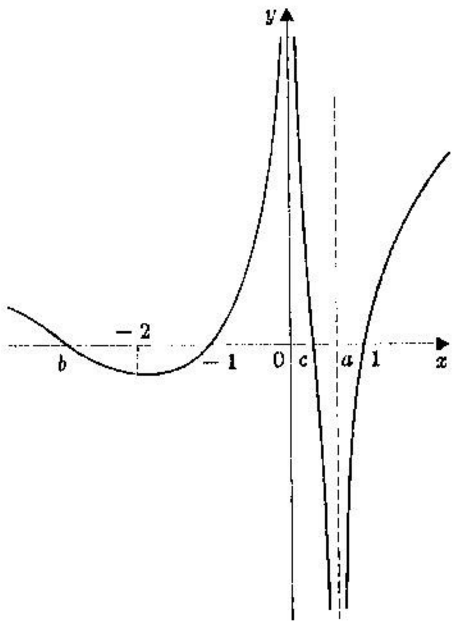

**2.26** – $E(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $f \in C(E(f))$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1^-$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $Z(f) = \{-1, 1\}$, $P(f) = \{x : x < -1 | 0 < x < 1\}$, $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$; $f'(x) = -2e^{2x\ln|x|}(\ln|x| + 1)$, $E(f') = E(f)$, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$, $Z(f') = \{-e^{-1}, e^{-1}\}$, $P(f') = \{x : -e^{-1} < x < 0 | 0 < x < e^{-1}\}$, $x = -e^{-1}$ punto di minimo con $f(-e^{-1}) = 1 - e^{2/e}$, $x = e^{-1}$ punto di massimo con $f(e^{-1}) = 1 - e^{-2/e}$; $f''(x) = -2e^{2x\ln|x|}\left\{2(\ln|x| + 1)^2 + \dfrac{1}{x}\right\}$, per $x > 0$ è $f''(x) < 0$, per $x < 0$ dal diagramma di $g(x) = \sqrt{2}|\ln|x| + 1| - \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ in figura 1, si ricava $Z(f'') = \{a\}$ con $-1 < a < -e^{-1}$, $P(f'') = \{x : a < x < 0\}$, $x = a$ punto di flesso ascendente; la funzione può essere prolungata con continuità in $x = 0$ e la funzione così completata ha in $x = 0$ un flesso a tangente verticale.






**2.27** – Confrontando i diagrammi delle funzioni $x$ e $\ln(x^2)$ si ottiene $E(f) = \mathbb{R} - \{0, a\}$ con $0 < a < 1$, $f \in C(E(f))$, $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $x = 0$ ed $x = a$ sono asintoti verticali; $f'(x) = \dfrac{2+x}{x(x+\ln(x^2))}$, $E(f') = E(f)$, $Z(f') = \{-2\}$, $P(f') = \{x : -2 < x < 0 | x > a\}$, $x = -2$ punto di minimo, $f(-2) = \ln(2 - \ln 4) < 0$ da cui segue $Z(f) = \{b, -1, c, 1\}$ con $-4 < b < -3$, $0 < c < a$, $P(f) = \{x : x < b | -1 < x < 0 | 0 < x < c | x > 1\}$; $f''(x) = -\dfrac{x^2 + 6x + 4 + 2\ln(x^2)}{x^2(x + \ln(x^2))^2}$, $E(f'') = E(f)$, poichè la funzione $g(x) = x^2 + 6x + 4 + 2\ln(x^2)$ è tale che $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$ e ammette un unico massimo relativo in $x = -1$ con $g(-1) = -1$ e un unico minimo relativo in $x = -2$, si ha che $Z(f'') = \{d, h\}$ con $-4 < d < -3$ e $0 < h < 1$, $P(f'') = \{x : d < x < 0 | 0 < x < h\}$, $x = d$ punto di flesso ascendente, $x = h$ punto di flesso discendente; per stabilire se i flessi sono a ordinata positiva o negativa sarebbero necessari ulteriori confronti.




**2.28 –** $E(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $f \in \mathcal{C}(E(f))$, $f$ è dispari, studiamo per $x > 0$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $Z(f) = \emptyset$ osservando che $\left|\sin \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{x}$ per $x > 0$, $P(f) = \{x : x > 0\}$, $y = 3x$ asintoto obliquo; $f'(x) = 2 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $E(f') = E(f)$, $Z(f') = \emptyset$ $P(f') = \{x : x > 0\}$; $f''(x) = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x}$, $E(f'') = E(f)$, $Z(f'') = \{a_k\}, k = 1, 2, \ldots,$ con $\frac{2}{(2k+1)\pi} < a_k < \frac{1}{k\pi}$, questo per $x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ si ottiene confrontando $\tan t$ con $\frac{2t}{2 - t^2}$, avendo posto $t = \frac{1}{x}$, mentre per $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ si osserva che

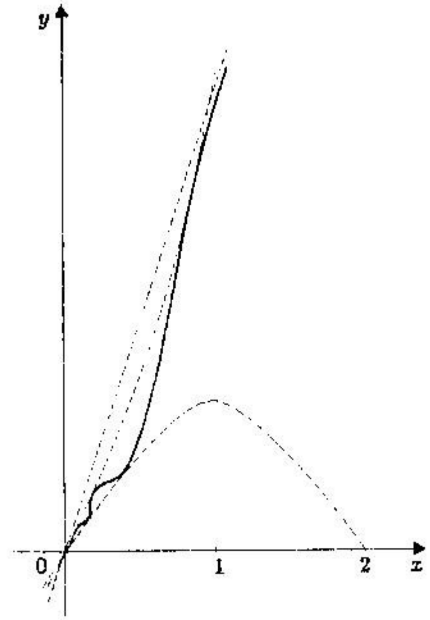
$$\left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} < \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} \leq$$

$$\leq \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) = 0$$

poichè $\cos t \geq 1 - \frac{t^2}{2}$ per $t \geq 0$;



$P(f'') = \{x : a_{2h-1} < x < a_{2h}\}$,
$h = 1, 2, \ldots$; $x = a_{2h-1}$ punti di flesso ascendente, $x = a_{2h}$ punti di flesso discendente; $f$ è prolungabile con continuità in $x = 0$, ma tale prolungamento non è derivabile; il diagramma è compreso tra i diagrammi delle due parabole $y = 2x + x^2$ e $y = 2x - x^2$.



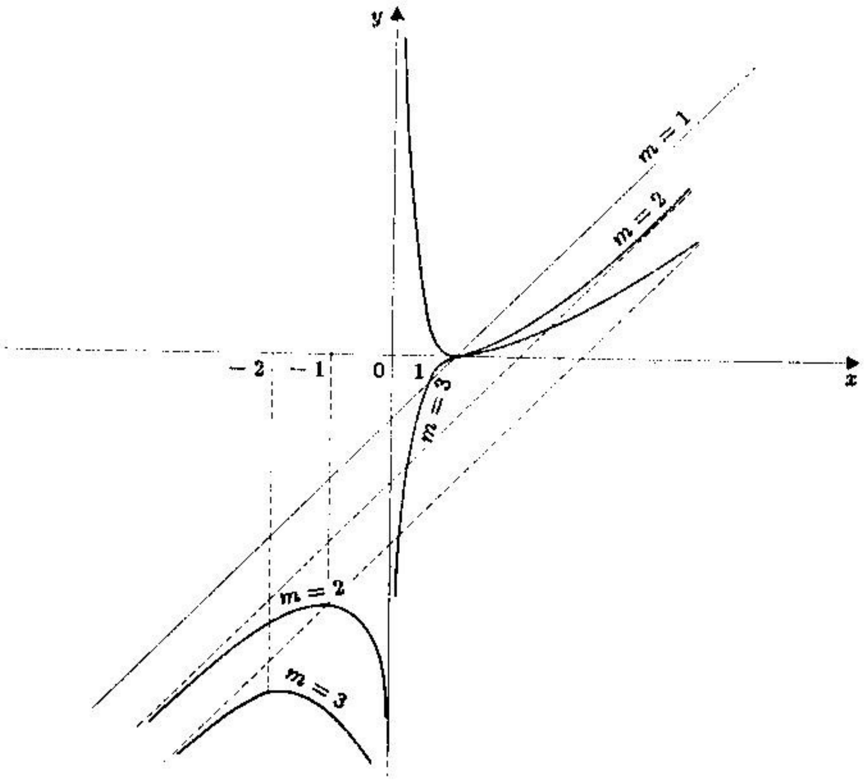

**2.29 –** Per $m = 1$ $\quad f(x, 1) = x - 1$, studiamo per $m > 1$;
$E(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $f \in \mathcal{C}(E(f))$,
$\lim_{x \to \mp\infty} f(x, m) = \mp\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x, m) = -\infty$,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x, m) = \begin{cases} +\infty & \text{per } m \text{ pari} \\ -\infty & \text{per } m \text{ dispari} \end{cases}$$

$Z(f) = \{1\}$, $P(f) = \{x : x > 1\}$ per $m$ dispari, $P(f) = \{x : 0 < x < 1 | x > 1\}$ per $m$ pari, $x = 0$ asintoto verticale, $y = x - m$ asintoto obliquo per $x \to \mp\infty$; $f'(x, m) = \frac{(x-1)^{m-1}}{x^m} \cdot (x - 1 + m)$, $E(f') = E(f)$, $Z(f') = \{1, 1 - m\}$, $P(f') = \{x : x < 1 - m | x > 1\}$ per $m$ pari, $P(f') = \{x : x < 1 - m | 0 < x < 1 | x > 1\}$ per $m$ dispari, $x = 1 - m$ punto di massimo con

$$f(1-m,m)=\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}},$$

$x=1$ punto di minimo per $m$ pari; $x=1$ punto di flesso a tangente orizzontale per $m$ dispari;
$f''(x)=\frac{(x-1)^{m-2}}{x^{m+1}}m(m-1)$, $E(f'')=E(f)$,
$Z(f'')=\{1\}$ per $m>2$, $Z(f'')=\emptyset$ per $m=2$,
$P(f'')=\{x:0<x<1|x>1\}$ per $m>2$ pari,
$P(f'')=\{x:x>1\}$ per $m$ dispari,
$P(f'')=\{x:x>0\}$ per $m=2$.




**2.30 –** Per $c=0$ si ha $f(x,0)=x$, consideriamo $c\neq 0$;
$E(f)=\{x:0<x<1|x>1\}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x,c)=0^+$,

$$\lim_{x\to 1^\mp} f(x,c)=\begin{cases}\pm\infty & \text{per} \quad c<0\\ \mp\infty & \text{per} \quad c>0\end{cases}$$



$\lim_{x\to+\infty} f(x,c)=+\infty$, $Z(f)=\{e^{-c}\}$,
$P(f)=\{x:0<x<e^{-c}|x>1\}$ per $c>0$,
$P(f)=\{x:0<x<1|x>e^{-c}\}$ per $c<0$; $x=1$ asintoto verticale;
$f'(x,c)=\frac{\ln^2 x+c\ln x-c}{\ln^2 x}$, $E(f')=E(f)$,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x,c)=\begin{cases}1^+ & \text{per} \quad c<0\\ 1^- & \text{per} \quad c>0\end{cases};$$

per $-4<c<0$ è $Z(f')=\emptyset$, $P(f')=E(f)$; per $c<-4$ e $c>0$ è

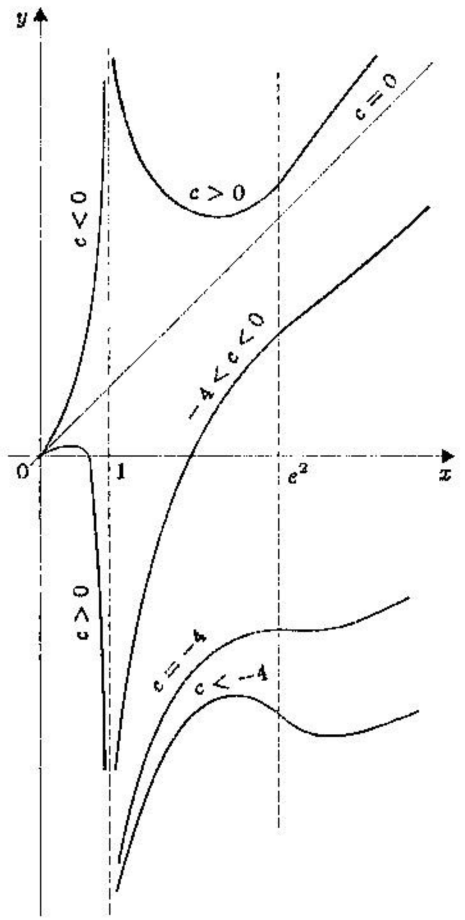
$$Z(f')=\left\{e^{-\frac{c+\sqrt{c^2+4c}}{2}}, e^{\frac{\sqrt{c^2+4c}-c}{2}}\right\}; \text{ per } c<-4$$

$$P(f')=\left\{x:0<x<1|1<x<e^{-\frac{c+\sqrt{c^2+4c}}{2}}|x>e^{\frac{\sqrt{c^2+4c}-c}{2}}\right\};$$

per $c>0$

$$P(f')=\left\{x:0<x<e^{-\frac{c+\sqrt{c^2+4c}}{2}}|x>e^{\frac{\sqrt{c^2+4c}-c}{2}}\right\};$$

$x=e^{-\frac{c+\sqrt{c^2+4c}}{2}}$ punto di massimo, $x=e^{\frac{\sqrt{c^2+4c}-c}{2}}$ punto di minimo; per $c=-4$ è $Z(f')=\{e^2\}$, $x=e^2$ punto di flesso ascendente a tangente orizzontale; ricavando $c$ dell'equazione $\ln^2 x+c\ln x-c=0$ e sostituendo in $f(x,c)$ si ha che il luogo dei punti a tangente orizzontale è la curva di equazione $y=\frac{x}{1-\ln x}$; $f''(x,c)=\frac{c(2-\ln x)}{x\ln^3 x}$, $E(f'')=E(f)$, $Z(f'')=\{e^2\}$; $P(f'')=\{x:1<x<e^2\}$ per $c>0$, $P(f'')=\{x:0<x<1|x>e^2\}$ per $c<0$; $x=e^2$ punto di flesso ascendente per $c<0$, discendente per $c>0$; $f(x,c)$ è prolungabile con continuità in $x=0$ e tale prolungamento è derivabile.




Capitolo X

# SUCCESSIONI DI FUNZIONI, SERIE DI FUNZIONI, SERIE DI POTENZE

## § 1 – Successioni e serie di funzioni

**1.1** – $f_n(x) \to 0$ per ogni $x$ fissato e per $n \to +\infty$; poiché $f_n(n) = 1$, la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$.

**1.2** – 1) $f_n(x) = e^{\frac{1}{n}\ln(1-x^n)} \to 1$ per $|x| < 1$, $f_n(1) = 0$ per ogni $n$ e $\{f_n(-1)\}$ non ammette limite, quindi non si ha la convergenza puntuale in $[-1, 1]$.
2) Essendo la funzione limite discontinua, la convergenza non è uniforme su $(-1, 1]$. (Vedi diagramma A21).

**1.3** – $\{f_n\}$ è convergente puntualmente per $x \leq 0$ alla funzione nulla; poiché $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \cdot e^{-1} \not\to 0$ per $n \to +\infty$, la convergenza non è uniforme in $x \leq 0$.

**1.4** – Fissato $x \in \mathbb{R}$, per ogni $n > x - 1$ è $f_n(x) = 0$, quindi $f_n(x) \to 0$ su $\mathbb{R}$.
Poichè

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = 1$$

per ogni $n$, la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$.
$\sup_{x\in(-\infty,a]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ per ogni $n > a$, quindi la convergenza è uniforme su $(-\infty, a]$.

1.5 – Per $x = 0$ si ha la serie nulla; per $0 < x < 2$ è

$$s(x) = x\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n = 1 - x$$

essendo $|1 - x| < 1$; poichè è

$$\sup_{x\in[a,r]}\left|s(x) - x\sum_{k=1}^{n-1}(1-x)^k\right| =$$
$$= \sup_{x\in[a,r]}|1-x|^n = \max\{|1-a|^n, |1-r|^n\},$$

segue la convergenza uniforme in $[a, r]$; poichè $\sup_{x\in[0,r]}|1 - x|^n = 1$ su tale intervallo la convergenza non è uniforme.

1.6 – 1) Poichè $\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ la serie risulta uniformemente convergente.
2) $T = \mathbb{R}^+$; poichè $\max_{x\in T}\left(\frac{nx}{e^{nx}}\right) = \frac{1}{e}$, la convergenza su $T$ non è uniforme (non è verificata la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme).
3) Posto $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$, è $|u_n(x)| \leq |x|^n$ per $|x| < 1$ e $|u_n(x)| < \frac{1}{|x|^n}$ per $|x| > 1$, quindi $T = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$; poiché $\sup_{x\in T}|u_n(x)| \geq \frac{1}{2}$, la convergenza su $T$ non è uniforme; la convergenza è uniforme su ogni insieme
$T_\delta = \{x : |x| < 1 - \delta \mid |x| > 1 + \delta\ , \delta > 0\}$.
4) Poiché $x^n$ e $\frac{1}{2^n x^n}$ hanno lo stesso segno, la serie data converge ove convergono le serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^n$, cioè per $\frac{1}{2} < |x| < 1$; la convergenza su tale insieme non è uniforme.
5) $T = \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $\sup_{x\in T}\frac{1}{n^x} = 1$ per ogni $n$, quindi la convergenza su $T$ non è uniforme; la convergenza è uniforme su ogni insieme $[a, +\infty)$ poiché detta $s(x)$ la somma delle serie, è $\left|s(x) - \sum_{k-1}^{n-1}(-1)^k\cdot\frac{1}{k^x}\right| \leq \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a} \to 0$ per $x \to +\infty$.



1.7 – $\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = \frac{1}{n^2} \to 0$ per $n \to +\infty$, quindi $f_n \to 0$ uniformemente su $\mathbb{R}$.
Fissato $x \in (n-1, n]$ è

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Poichè $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$, la convergenza della serie di funzioni è uniforme.

1.8 – 1) $f_n(x) \to 0$ per $n \to +\infty$ per ogni $x$; comunque scelti $a < 0$, $b > 0$, è $\sup_{x\in[a,b]} f_n(x) = 1$ per $n \geq \frac{1}{b}$, quindi la convergenza non è uniforme.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è convergente in quanto per ogni $\overline{x}$ è $f_n(\overline{x}) = 0$ definitivamente; poiché $\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = 1$, la convergenza non è uniforme.

1.9 – La convergenza assoluta e la convergenza uniforme sono evidenti; se la convergenza fosse normale, dovrebbe esistere $\{a_n\}$ con $|u_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, ma in questo caso sarebbe $a_n \geq \frac{1}{n}$, assurdo.

1.10 – Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie è convergente; posto

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot\frac{\sin x + k}{k^2}$$

e detta $s(x)$ la somma della serie, è

$$|s(x) - s_n(x)| \leq \left|\frac{\sin x + n + 1}{(n+1)^2}\right| \leq \frac{n+2}{(n+1)^2} \to 0$$

per $n \to +\infty$, quindi la convergenza è uniforme.
Poiché

$$\left|(-1)^n\cdot\frac{\sin x + n}{n^2}\right| \geq \frac{n-1}{n^2}$$

per ogni $x$, la convergenza non è assoluta.

**1.11** – Per ogni $x$ fissato, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x-n) = A$.
Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K > 0$ tale che per $x < K$ è $|f(x)-A| < \varepsilon$; fissato $a$, se $n$ è tale che $a - n < K$, è $|f_n(x) - A| < \varepsilon$ per ogni $x < a$ e quindi la convergenza è uniforme.
Poichè $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - A| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - A|$, se $f(x) \not\equiv A$, la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$.

**1.12** – Procedendo in modo analogo a X.1.11 segue l'asserto.

**1.13** – Procedendo in modo analogo a X.1.11 ed osservando che $f_n(0) = f(0)$ per ogni $n$, segue l'asserto.

**1.14** – Per la continuità di $f$ è $f_n \to f$ per $n \to +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; poiché $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right| \to 0$ per $n \to +\infty$, per l'uniforme continuità di $f$ segue l'asserto.

**1.15** – Per la uniforme convergenza, esiste $\overline{n}$ tale che per $n \geq \overline{n}$ è $|f_n(x) - f_{\overline{n}}(x)| < 1$ per ogni $x \in T$, da cui

$|f_n(x)| \leq \sup_{x\in T} |f_{\overline{n}}(x)| + 1 = M$;

posto $K = \max\left( \sup_{\substack{x\in T\\ 1\leq i\leq \overline{n}}} f_i(x), M \right)$ è $|f_n(x)| \leq K$ per ogni $x \in T$ e per ogni $n$.

**1.16** – $f_n(x) = n\chi_{E_n}(x)$, ove $E_n = [n, n+1]$.

**1.17** – La parte relativa alla somma è ovvia.
Per quanto riguarda il prodotto, poiché $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| =$
$= |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \leq$
$\leq |f_n(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)|$, per la equilimitatezza di $\{f_n\}$ (vedi X.1.15), per la limitatezza di $g$ e per la uniforme convergenza di $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ segue l'asserto.

**1.18** – $f_n(x) = x^2$, $g_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{E_n}(x)$ ove $E_n = [n, n+1]$.



**1.19** – $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}\cdot x}{1+(\sqrt{n}\cdot x)^2}$, poiché $\frac{t}{1+t^2}$ è limitata, la convergenza a 0 di $\{f_n\}$ è uniforme.

$$f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} \to \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases} \text{per } n \to +\infty.$$

**1.20** – Poiché

$$D\left(\frac{\sin(2^n\pi x)}{2^n}\right) = \pi\cos(2^n\pi x)$$

e la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi\cos(2^n\pi x)$$

non converge in alcun punto, segue l'asserto.

**1.21** – $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}$ converge uniformemente;

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}x^n,$$

$$(x+1)f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}\right)x^n + x = xf'(x).$$

**1.22** – Posto $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, per I.2.8, fissato $\varepsilon > 0$ è

$$\left|\sum_{n=m}^{k} g_n(x)f_n(x)\right| \leq \left|\sum_{n=m}^{k-1} (g_n(x) - g_{n+1}(x))F_n(x)\right| +$$
$$+ |g_k(x)F_k(x)| + |g_m(x)F_{m-1}(x)| \leq M\,\{g_m(x) - g_k(x) +$$
$$+ |g_k(x)| + |g_m(x)|\} < \varepsilon$$

per $m, k$ abbastanza grandi e per ogni $x \in T$, quindi, per la condizione di Cauchy, segue l'asserto.

**1.23** – 1) Per IV.3.2 la serie converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$; le somme parziali di $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ sono equilimitate su ogni chiuso non contenente alcuno dei punti $x = 2k\pi$, quindi, per X.1.22, su tali insiemi la convergenza è uniforme.
2) Per IV.3.2 e X.1.22 la serie converge semplicemente per $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e converge uniformemente in ogni intervallo chiuso non contenente alcuno dei punti $x = 2k\pi$.

○ **1.24** – Se $|x| < K$, è $\left|\frac{[nx]}{n^3}\right| \le \frac{K}{n^2}$, da cui segue la convergenza uniforme su ogni intervallo limitato. Poiché in ogni punto irrazionale ogni $u_n(x) = \frac{[nx]}{n^3}$ è continua, per l'uniforme convergenza è continua anche $f(x)$. Ogni funzione $u_{kq}(x)$ è discontinua in $\frac{p}{q}$; poichè, per il teorema del doppio limite, è

$$\lim_{x\to\left(\frac{p}{q}\right)^+} f(x) - \lim_{x\to\left(\frac{p}{q}\right)^-} f(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to\left(\frac{p}{q}\right)^+} u_n(x) - \lim_{x\to\left(\frac{p}{q}\right)^-} u_n(x)\right\}$$

e

$$\lim_{x\to\left(\frac{p}{q}\right)^+} u_n(x) - \lim_{x\to\left(\frac{p}{q}\right)^-} u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad n \neq kq \\ \frac{1}{k^3q^3} & \text{per} \quad n = kq \end{cases}$$

segue l'asserto.

○○ **1.25** – Poichè $|f_n(x - r_m)| \le 1$ per ogni $x$ e per ogni $m$, la serie converge normalmente e quindi $g_n$ è continua per ogni $n$.
Per ogni $\varepsilon > 0$ si può determinare $\overline{m}$ in modo che $2^{-\overline{m}} < \varepsilon/2$; fissato allora $\overline{x}$, sia $d$ il minimo dei valori positivi di $|\overline{x} - r_m|$ con $m \le \overline{m}$, sia $\overline{n} > \frac{2}{d}$, allora, per $n \ge \overline{n}$, è $f_n(\overline{x} - r_m) = 0$ per $m \le \overline{m}$, da cui $0 < g_n(\overline{x}) = \sum_{m=\overline{m}+1}^{\infty} 2^{-m} f_n(\overline{x} - r_m) < \varepsilon$.

Poiché, per ogni $n$, $g_n\left(r_k + \frac{1}{n}\right) \ge 2^{-k} f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-k}$, per la densità dei razionali la convergenza non può essere uniforme in alcun intervallo.

○ **1.26** – Sia $x_0 \in (a,b)$; comunque scelto $\varepsilon > 0$, per la continuità di $f$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in [a,b]$ con $|x_0 - x| < \delta$ è $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}$; sia $0 < \sigma < \delta$ tale che $x_1 = x_0 - \sigma$ e $x_2 = x_0 + \sigma$ stiano in $[a,b]$, allora, per la convergenza puntuale di $\{f_n\}$, esistono $n_1$ ed $n_2$, tali che per $n \ge n_1$ è $|f_n(x_1) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{6}$ e per $n \ge n_2$ è $|f_n(x_2) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{6}$; sia $n_{x_0} = \max(n_1, n_2)$, per la monotonia delle $f_n$, se $n \ge n_{x_0}$ e se $x \in [x_1, x_2]$ è

$$|f_n(x) - f_n(x_1)| \le |f_n(x_2) - f_n(x_1)| \le |f_n(x_2) - f(x_2)| + \\ + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_1) - f_n(x_1)| < \frac{2}{3}\varepsilon$$

e quindi

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x) - f_n(x_1)| + |f_n(x_1) - f(x_1)| + \\ + |f(x_1) - f(x)| < \varepsilon,$$

cioè ad $x_0$ è associato un intorno aperto $U(x_0)$ in cui la convergenza è uniforme. Se $x = a$, avremo un intorno del tipo $[a,\overline{x})$ in cui la convergenza è uniforme, ed associamo ad $a$ un aperto $U(a)$ tale che $U(a) \cup [a,b] = [a,\overline{x})$; analogamente per $b$.
In questo modo, comunque scelto $\varepsilon > 0$, ad ogni $x \in [a,b]$ sono associati un aperto $U(x)$ed un intero $n_x$; per la compattezza di $[a,b]$ esistono un numero finito di tali aperti, siano $U(x_1), \dots, U(x_k)$, copertura di $[a,b]$; se $N = \max(n_{x_1}, \dots, n_{x_k})$, per $n \ge N$ e per ogni $x \in [a,b]$ è $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, cioè la convergenza è uniforme.

○ **1.27** – Per ogni $\varepsilon > 0$, fissato $x_0$ esiste $n_{x_0}$ tale che per $n \ge n_{x_0}$ risulta $0 \le g_n(x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Per la continuità delle $g_n$ e la monotonia della successione $\{g_n\}$, esiste un intorno di $x_0$ in ogni punto $x$ del quale è $0 \le g_n(x) < \varepsilon$ per $n \ge n_{x_0}$. Quindi, procedendo come in X.1.26, si ha l'asserto.

○○ **1.28** – La disuguaglianza del suggerimento si ottiene osservando che esiste almeno un punto di $T$ non coperto dai dischi di raggio $\frac{d}{4k}$ e centro $z_i$, $i = 1, \dots, k$.
Se $P_n \to 0$ uniformemente su $T$, è $a_{k,n} \to 0$ per $n \to +\infty$; poiché $|P_n(z)| \ge \big||P_n(z) - a_{k,n}z^k| - |a_{k,n}z^k|\big|$, si ha che $|P_n(z) - a_{k,n}z^k| \to 0$ uniformemente e ripetendo il ragionamento precedente sulla successione di polinomi

$Q_n(z) = P_n(z) - a_{k,n}z^k$, si ha che $a_{k-1,n} \to 0$ per $n \to +\infty$, e così di seguito per le altre successioni dei coefficienti. Da quanto precede si ha che se $\{P_n\}$ è di Cauchy, allora tutte le successioni $\{a_{i,n}\}$, $i = 0, \dots, k$ sono di Cauchy;
posto $a_i = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{i,n}$, sia $P(z) = a_k z^k + \ldots + a_0$, allora è $P_n \to P$ uniformemente.

**1.29 –** È evidente che $\sup\limits_{x\in A}|f(x)|$ definisce una norma su $B(A)$, norma che viene indicata con $\|f\|$.
Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $B(A)$, cioè $\|f_n - f_m\| \to 0$ per $n, m \to +\infty$; essendo $\|f_n - f_m\| = \sup\limits_{x\in A}|f_n(x) - f_m(x)|$, $\{f_n\}$ converge uniformemente ad una funzione $f$ definita su $A$ e che, per X.1.15, è ivi limitata, cioè $f \in B(A)$, ma poiché $\|f_n - f\| = \sup\limits_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ per $n \to +\infty$, si ha che $f$ è il limite di $\{f_n\}$ nella norma di B(A), cioè $B(A)$ è completo.

**1.30 –** Ricordando che se $f \in C(K)$ allora $f \in B(K)$ e che il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua, per X.1.29 segue l'asserto.

## § 2 – Serie di potenze.

**2.1 –** 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = 0$, converge su $\mathbb{C}$;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = 0$, converge su $\mathbb{C}$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)!}{(2n+2)!} = 0$, converge su $\mathbb{C}$;

4) converge su $\mathbb{C}$;

5) converge su $\mathbb{C}$;

6) $r = 1$;

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, $r = 1$;



8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{n!\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)} \right| = 1$, $r = 1$.

**2.2 –** 1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $\quad I = \mathbb{R}$;

2) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad I = \mathbb{R}$;

3) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $\quad I = \mathbb{R}$;

4) $\mathrm{Ch}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\quad I = \mathbb{R}$;

5) $\mathrm{Sh}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad I = \mathbb{R}$;

6) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$, $\quad I = (-1, 1)$;

7) $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $\quad I = (-1, 1)$.

**2.3 –** 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$, converge su $\mathbb{C}$;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt{2}$, $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n^3]{n!} = 1$, $r = 1$;

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n}{2^{2n}}} = \dfrac{1}{4}$, $r = 4$;

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{p/n} = 1$, $r = 1$;

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, converge su $\mathbb{C}$;

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^{2n+1})^{\frac{1}{2n+1}} = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (b^{2n})^{\frac{1}{2n}} = b$, quindi $\limsup\limits_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n} = \max(a, b)$ e $r = \min\left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}\right)$;

8) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{(4n+3)(4n+5)}{(4n+4)^2} \to 1$, $r = 1$.

**2.4 –** 1) $r = 1$, la serie non converge in alcun punto $z$ con $|z| = 1$, poiché, in tal caso, il termine generale non tende a zero.

2) $r = 1$, la serie converge assolutamente sulla circonferenza del cerchio di convergenza.

3) $r = 1$, la serie non converge in $z = 1$, ma converge in ogni altro punto $z$ con $|z| = 1$ (vedi IV.3.2).

4) $r = 1$, la serie converge in ogni punto $z$ con $z \neq -1$ (vedi IV.3.2).

**2.5** – Se $z_1$ sta sulla circonferenza del cerchio di convergenza è $|z_1| = |z_0|$ e quindi segue l'asserto.

**2.6** – Poiché ove entrambe le serie convergono assolutamente la serie prodotto converge assolutamente, segue l'asserto.
Il seguente esempio mostra che può essere $r > \max(r_1, r_2)$ : $-3-2\sum_{n=1}^{\infty} z^n;\ -\frac{1}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$, infatti la prima serie ha il raggio di convergenza 1, la seconda 3, la serie prodotto converge su tutto $\mathbb{C}$.

**2.7** – $\frac{1}{n+1}\frac{(a+n)(b+n)}{c+n} \to 1$ per $n \to +\infty$, il raggio di convergenza è 1; per IV.3.7 la convergenza è assoluta per $|z| = 1$ se $a+b < c$, se $a+b \geq c$ la serie non converge assolutamente per $|z| = 1$.

**2.8** – Per IV.3.1 e IV.3.2 la serie converge per $|z| \leq 1$ escluso al più $z = 1$; procedendo poi come in X.1.22 si prova la seconda affermazione.

**2.9** – 1) Per $n = 1, 2$ la disuguaglianza è vera, supponiamola vera fino a $n-1$, allora
$|a_n| \leq |\alpha|(2c)^{n-2} + |\beta|(2c)^{n-3} \leq (2c)^{n-2}(|\alpha| + |\beta|) \leq (2c)^{n-1}$;
poiché $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} \leq 2c$ è $r \geq \frac{1}{2c}$.
2) Basta eseguire le operazioni indicate.

∘ **2.10** – Le serie 1) e 2) hanno raggio di convergenza eguale ad 1.
Per $z \in \mathbb{R}$ entrambe le serie sono derivabili termine a termine e per X.2.2 la somma delle serie derivate è rispettivamente $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$; allora le serie 1) e 2) hanno la somma che differisce per una costante da $\arcsin z$ e $\operatorname{settSh} z$, tale costante è evidentemente nulla e quindi posto $z = 1$ e sommando le due serie termine a termine, si ha l'asserto.



**2.11** – 
$$|\exp z - 1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1 =$$
$$= |z|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{n-1}}{n!} \leq |z|\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{|z|^{n-1}}{n!} = |z|e^{|z|}.$$

## § 3 – Sul comportamento delle serie di potenze sopra e in prossimità della circonferenza di convergenza.

In questo ultimo paragrafo del Cap. X ci proponiamo di presentare alcune informazioni riguardanti le serie di potenze nel campo complesso : $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n(z-z_0), a_n \in \mathbb{C}, (n = 0, 1, 2, \ldots); z_0, z \in \mathbb{C}$.
Per questa presentazione ci varremo dell'opera E. Landau Darstellung Begründung ... Springer, Berlin, 1929.
È noto che tali serie costituiscono un tipo di "rappresentazione locale" delle cosiddette "funzioni analitiche"; ciascuna di tali serie ha un campo di convergenza (che può anche essere l'intero piano $\mathbb{C}$ o anche il solo centro $z_0$ o punto iniziale). Nel caso in cui la serie di potenze converga in qualche punto fuori dal centro e non converga in qualche altro punto, il campo di convergenza risulta un cerchio $D$ $|z - z_0| < R$ (che consideriamo aperto) la cui frontiera $T$ è la circonferenza di convergenza $|z - z_0| = R$. Considereremo serie di potenze con raggio di convergenza positivo finito $0 < R < +\infty$.
È interessante, per la molteplice varietà di aspetti, lo studio del carattere della serie sopra $T$ e del comportamento della funzione sopra $D$ in prossimità di $T$; appariranno circostanze inattese che, a prima vista, potrebbero far ritenere mancanza di collegamento fra i due fenomeni anzidetti. Come rudimentali esempi consideriamo le tre serie seguenti

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\quad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)},\quad \text{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

(a) ha come somma $1/(1-z)$; $z=1$ è singolare; la serie non converge in alcun punto di $T$; nel punto $z=-1$ la serie non converge ma ha la successione delle somme parziali $1,0,1,0,,1,0,\dots$ limitata.

(b) la serie converge assolutamente e anche uniformemente su tutto $T$.

(c) per $z=-1$ ha il valore $-\log 2$ e la serie converge.

Conviene "normalizzare" la serie di potenze con l'assumere il centro $z_0=0$, ridurre il raggio di convergenza al valore 1 e, nel caso in cui la funzione $f(z)$ abbia modulo $|f(z)|$ limitato in $D$, cioè $|f(z)|\le M$, con l'assumere $M=1$. Infatti bastano le trasformazioni semplici $z-z_0\mapsto z$, $z\mapsto z/r$, $f\mapsto f/M$ per ricondurci alle condizioni normali segnalate senza alterare la generalità dei problemi.

Risulta utile introdurre notazioni e convenzioni per poter esprimere, anche in forma schematica, le numerose classiche proposizioni sull'argomento.

*Notazioni*

$f(z)=\sum_0^\infty a_h z^h$, $f_n(z)=\sum_0^n a_h z^h$, $z\in\mathbb{C}$, $z=r\exp(i\varphi)$, $a_h\in\mathbb{C}$ $(h=0,1,2,\dots)$. $f_n(z)$ è un polinomio definito su tutto $\mathbb{C}$.

Il cerchio di convergenza e la sua frontiera sono:

$D=\{z:|z|<1\}$, disco unitario (aperto); $(0\le r<1,\ \varphi\gtreqless 0)$.

$T=\{z:|z|=1\}$, $(r=1, \varphi\gtreqless 0)$.

$\overline{D}=D\cup T=\{z:|z|\le 1\}=$ chiusura di $D$

$\forall z\in D$, $f(z)$ converge assolutamente, cioè $\sum_0^\infty |a_h z^h|<+\infty$.

Per ogni $0<\delta<1$ poniamo $D_\delta=\{z:|z|\le 1-\delta\}$ (cerchio chiuso di raggio $<1$); allora $f_n(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ in $D_\delta$.

Si dice funzione maggiorante di $f$ la funzione rappresentata dalla serie

$$\mathcal{M}(f,r)=\sum_0^\infty |a_n|r^n, (0<r=|z|<1).$$

Per $z\in D$ risulta $|f(z)|\le \mathcal{M}(f,|z|)$.

Accanto a $f(z)$ è utile considerare la serie



$$g(\varphi)=\sum_0^\infty a_n\exp(\mathrm{i}n\varphi)\quad (\varphi\gtreqless 0)$$

la quale, formalmente si ottiene assumendo $z=\exp(i\varphi)$, cioè su $T$, nell'espressione $f(z)$: conviene pensare $f(z)$, $g(\varphi)$ come due enti distinti ma pronti per entrare in relazione.

*Raggio di regolarità, punto regolare della serie di potenze*

Si consideri il raggio $0\le r<1$, $\varphi=\varphi_0$ del disco $D$; fissato su questo raggio il punto $z_1=\delta\exp(1\varphi_0)$, $(0<\delta<1)$, si consideri la serie di potenze $f_1(z)=\sum_0^\infty a_n((z-z_1)+z_1)^n=\sum_0^\infty b_k(z-z_1)^k$ ottenuta da $f(z)$, assumendo come nuova origine il punto $z_1$; questa serie dedotta ha un disco di convergenza $D_1$ ed un raggio di convergenza $R_1$ che verifica necessariamente la limitazione $1-\delta\le R_1\le 1+\delta$ (i due valori estremi $R_1=1-\delta$ e $R_1=1+\delta$ corrispondono rispettivamente al caso in cui il disco $D_1$ è tangente internamente a $D$ nel punto $\exp(i\varphi_0)$ oppure è tangente esternamente a $D$ nel punto $\exp(i(\varphi_0+\pi))$) (il lettore è pregato di costruire la semplice figura); nel caso generale risulterà $D_1$ di raggio $R_1$ con $1-\delta<R_1<1+\delta$ ed il cerchio $D_1$ deborderà da $D$ per una lunula $L$, tagliando sopra $T$ un arco $\widehat{\alpha\beta}$. I valori di $f_1(z)$ in $L$ si dicono secondo Weierstrass ***dedotti per prolungamento*** da $f(z)$ lungo il raggio $(0,\exp(i\varphi_0))$. Distinguiamo i due casi: 1°) $R_1=1-\delta$, allora questo ***raggio*** è ***di singolarità*** ed $\exp(i\varphi_0)$ è un ***punto singolare*** per $f(z)$; 2°) $1-\delta<R_1\le 1+\delta$, allora il ***raggio è di regolarità***, il ***punto*** $\exp(i\varphi_0)$ ***è regolare*** e si potrebbe stabilire che ogni punto di $\widehat{\alpha\beta}$ esclusi i due estremi risulta regolare. Si chiama ***arco di regolarità*** ogni arco $\widehat{\alpha_1\beta_1}$ strettamente contenuto in $\widehat{\alpha\beta}$. Si potrebbe stabilire che nel caso speciale in cui $R_1=1+\delta$ il punto $\exp i(\varphi_0+\pi)$ è l'unico punto singolare su $T$; ogni altro punto è regolare e l'arco $(\varphi_0-\pi+\nu,\varphi_0+\pi-\nu)$ per ogni $\nu>0$ risulta di regolarità. Denotiamo con $W(f)$ l'insieme dei punti regolari di $f(z)$ su $T$; questo insieme è aperto su $T$ nel senso che ogni punto regolare $\varphi_0$ possiede un arco $(\varphi_0-\nu,\varphi_0+\nu)$ di regolarità che lo contiene. Vale il seguente:

*Teorema* Sopra $T$ esiste almeno un punto singolare.
In simboli: $T - W(f) \neq \emptyset$.

*Convergenza assoluta* È evidente che per la convergenza assoluta di $f(z)$ sopra $T$ si verifica sempre uno ed uno solo dei due seguenti casi:
$f(z)$ converge assolutamente sopra tutto $T$ oppure non converge assolutamente in alcun punto di $T$ (vedi X.2.5).
La serie $g(\varphi)$ sopra $T$ - La serie $g(\varphi)$ può essere: convergente o non convergente in un punto $\varphi_0$ di $T$, convergente uniformemente in un insieme $U \subseteq T$. Se la serie $g(\varphi)$ converge assolutamente essa converge a maggior ragione uniformemente; infatti per ogni $\varphi$ risulta
$|a_{h+1} \exp i(h+1)\varphi + \ldots + a_k \exp ik\varphi| \leq |a_{h+1}| + \ldots + |a_k|$.
Denotiamo con $K(f)$ l'insieme dei punti $\exp(i\varphi)$ in ciascuno dei quali la serie $g(\varphi)$ converge, cioè $K(f) = \left\{ \exp(i\varphi) : \sum_0^\infty a_n \exp(in\varphi) \text{ converge}, \ \varphi \gtrless 0 \right\}$ ed è $K(f) \subseteq T$. Può darsi che esista finito il limite di $f(r \exp i\varphi)$ al tendere di $r$ a $1^-$, lungo il raggio $(0, \exp i\varphi)$: denotiamo con $\lambda(\varphi)$ detto limite e con $\Lambda(f)$ l'insieme dei punti ove esiste il limite radiale; $\lambda(\varphi)$ è definita su $\Lambda(f)$.
Si consideri il settore (di Stolz) avente vertice in $\exp i\varphi$, bisettrice il raggio $(0, \exp i\varphi)$, semiampiezza $\alpha$ (con $0 \leq \alpha < \pi/2$) (per $\alpha = 0$ si riduce al raggio). Denotiamo con $S(\alpha; \exp i\varphi)$, $\varphi \gtrless 0$, il settore di Stolz e con $\Lambda(f, \alpha)$ l'insieme dei punti $\exp(i\varphi)$, eventualmente vuoto, per i quali esiste finito il limite di $f(z)$ per $z \to \exp(i\varphi)$ restando nel settore $S(\alpha; \exp i\varphi)$ (sempre internamente a $D$). è evidente che $\Lambda(f, \alpha) \subseteq \Lambda(f, 0) = \Lambda(f)$.

## 1 Proprietà delle funzioni limitate

Indichiamo con $B$ la classe delle funzioni $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tali che $|f(z)| \leq 1$ su $D$.

*Teorema*
Poniamo $t_n(z) = \dfrac{f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z)}{n+1}$, $u_n(z) = |f_0(z)| + \ldots + |f_n(z)|$, $v_n(z) = |f_0(z)|^2 + \ldots + |f_n(z)|^2$.
Valgono le seguenti relazioni:
$f \in B \Leftrightarrow |t_n(\exp i\varphi)| \leq 1$ per ogni $n$ e $\varphi$ (Steffensen–Fejér),



$f \in B \Leftrightarrow u_n(\exp i\varphi) \leq n+1$ per ogni $n$ e $\varphi$ (Schur),
$f \in B \Leftrightarrow v_n(\exp i\varphi) \leq n+1$ per ogni $n$ e $\varphi$ (Schur).

Esiste un disco più ristretto di $D$ nel quale sia garantita la limitazione $|f_n(z)| \leq 1$ ed il cui raggio ridotto sia valido per ogni $f \in B$?

*Teorema* (Rogosinski)
$f \in B \Rightarrow |f_n(z)| \leq 1$ per ogni $z$ con $|z| \leq \dfrac{1}{2}$.

*Teorema* (E. Landau)
$\sup_{f \in B} |a_0 + a_1 + \ldots + a_n| = G_n$, dove

$$G_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^2 .$$

Fissati $n \geq 0, \delta > 0$ esiste $f(z) \in B$ tale che $|f_n(1)| > G_n - \delta$.

Per qualche funzione $f(z)$ limitata può accadere che non risulti limitata $f_n(1)$?

*Teorema* (Fejér)
Esistono funzioni $f(z) \in B$ per le quali la successione $f_n(1) = a_0 + \ldots + a_n$ risulta non limitata, cioè $\sup |f_n(1)| = +\infty$.

Si consideri $f(z)$ limitata e la sua maggiorante $\mathcal{M}(f, r)$. Potrà anche accadere che $\mathcal{M}(f, r)$ non sia limitata. Domandiamoci: per il fatto che essa è maggiorante di una funzione limitata deve sottostare a vincoli che ne limitino l'intensità di accrescimento? La risposta è fornita dal seguente

*Teorema* (Hardy)

$$f \in B \Rightarrow \mathcal{M}(f, r) = o((1-r)^{-1/2}) \text{ per } r \to 1^-$$

Domandiamoci: esiste un disco di raggio $\theta < 1$ nel quale sia garantita la limitatezza della maggiorante? ($\theta$ costante universale).

*Teorema* (Bohr–M. Riesz–Schur–F. Wiener)
$f \in B \Rightarrow \mathcal{M}(f, r/3) \leq 1$.
(1/3 è "la migliore costante").

## 2 I teoremi di continuità e quelli di inversione

Se la serie $g(\varphi)$ converge nel punto $\varphi = \varphi_0$ possiamo chiederci se esista il limite radiale od il limite nel settore di Stolz. Inversamente: se esiste il limite per $z \to \exp(i\varphi)$ lungo il raggio o entro il settore possiamo chiederci se $g(\varphi_0)$ converga. Le risposte sono la prima affermativa mentre la seconda non è affermativa in generale e conduce ai teoremi di inversione.

*Teorema* (Abel)
Se la serie $g(\varphi) = a_0 + a_1 \exp i\varphi + \ldots + a_n \exp(in\varphi_0) + \ldots$ è convergente ed è $g(\varphi_0) = A$ allora $\lim\limits_{r\to 1^-} f(r \exp i\varphi_0) = A$ (ed anche $\lim \ldots z \to \exp(i\varphi_0)$ entro un qualunque settore di Stolz di vertice $\exp(i\varphi_0)$).
Cioè: $K(f) \subseteq \Lambda(f)$, $K(f) \subseteq \Lambda(f,a)$.
L'inversione del teorema di Abel richiede come ipotesi una condizione $(\mathcal{T})$ che può assumere varie forme dando luogo a proposizioni più o meno raffinate. La prima inversione risale a Tauber e pertanto questi teoremi si dicono tauberiani ($\mathcal{T}$ condizione tauberiana). Se ne conoscono numerose forme: riportiamo qui la più semplice.
Possiamo senza alterare la generalità assumere $\varphi_0 = 0$ e inoltre, nullo il limite di $f(z)$.

*Teorema* (Tauber)

$f(z) \to 0$ per $z \to 1-$ (lungo il raggio), $a_n = o(1/n) \Rightarrow \sum\limits_0^\infty a_n = 0$.

La condizione $(\mathcal{T})$ $a_n = o(1/n)$ è quella tauberiana. Citeremo qui due sole altre condizioni.

*Teorema* (Hardy–Littlewood)

$f(z) \to 0$ per $z \to 1^-$ (lungo il raggio), $(\mathcal{T}_1)$ oppure $(\mathcal{T}_2) \Rightarrow \sum\limits_0^\infty a_n = 0$.

$(\mathcal{T}_1) a_n = O(1/n)$
$(\mathcal{T}_2) a_n \in \mathbb{R}, a_n < c/n$ ($c$ indipendente da $n$).

Che cosa si può dire di $K(f)$ quando siamo in presenza dei punti di regolarità?

*Teorema* (Fatou–M. Riesz)

Se $a_n \to 0$, la serie $\sum\limits_0^\infty a_h \exp(ih\varphi)$ converge in ogni punto regolare di $f(z)$



su $T$; anzi, di più, converge uniformemente su ogni arco di regolarità. Cioè: $a_n \to 0 \Rightarrow W(f) \subseteq K(f)$.

*Teorema* (Fejér)
Se $\sum\limits_0^\infty n|a_n|^2$ converge, allora $g_n(\varphi)$ converge in ogni punto per il quale esiste il limite radiale. Anzi, di più, la convergenza di $g_n(\varphi)$ risulta uniforme in ogni insieme $U$ nel quale il limite esiste uniforme.
In simboli:

$$\sum_0^\infty n|a_n|^2 < +\infty \Rightarrow \Lambda(f) = K(f).$$

## 3 Comportamento di serie di potenze in prossimità della frontiera di D

La convergenza assoluta su $T$ implica quella uniforme su $T$. Che cosa si può dire dell'inverso? Vale il seguente

*Teorema* (Hardy)
Esistono serie di potenze che convergono uniformemente su $T$, mentre non convergono assolutamente (su $T$).

Valgono anche le seguenti proposizioni

*Teorema* (Lusin)
Esistono serie di potenze $f(z)$ per le quali $a_n \to 0$ mentre non convergono in alcuni punti di $T$. Cioè (in base al teorema Fatou) $W(f) = \emptyset$ e ogni punto $|z| = 1$ è singolare.

*Teorema* (Sierpinski)
Esistono serie di potenze che convergono in un punto della circonferenza di convergenza mentre non convergono in alcun altro punto di essa. Cioè: esistono $f(z)$ per le quali $K(f) = \{\exp i\varphi\}$. Come conseguenza si ha $W(f) = \emptyset$.

**4 Localizzazione dei punti singolari**

Le proposizioni intese a localizzare i punti singolari costituiscono una categoria molto vasta. Ci limiteremo alle due proposizioni seguenti.

*Teorema* (Vivanti–Pringsheim)
Se ambedue le serie di potenze

$$\sum_0^\infty a_n z^n, \sum_0^\infty \alpha_n z^n \quad (\alpha_n \in \mathbb{R}^+, a_n = \alpha_n + i\beta_n)$$

hanno raggio di convergenza 1, allora il punto 1 risulta singolare per ambedue le serie.

*Teorema* (Fabry)
Se $h/p_h \to 0$ e $f(z) = \sum_1^\infty a_{p_h} z^{p^h}$, la funzione $f(z)$ ammette il punto 1 come singolare; anzi, di più, ogni punto $\exp i\varphi (\varphi \gtrless 0)$ è singolare. Ne segue $W(f) = \emptyset$.

È ben noto che se $z_0 \in D$ è punto di accumulazione di zeri di $f(z)$ allora $f(z)$ è identicamente nulla; ne segue che se l'insieme degli eventuali zeri di $f(z)$ interni a $D$ ammette qualche punto di accumulazione, detto punto dovrà trovarsi sopra $T$.
Consideriamo la successione di polinomi $f_n(z)$. Consideriamo l'insieme $(Z)$ dei loro zeri. Sia $Q(f)$ l'insieme dei punti di accumulazione di $(Z)$ e dei punti di $(Z)$ che sono zeri di infiniti $f_n(z)$.

*Teorema* (Hurwitz–Jentzsch)
$Q(f) = T$ (ogni punto $|z| = 1$ è di accumulazione per $(Z)$ oppure è zero di infiniti polinomi $f_n(z)$).

## Capitolo XI

# INTEGRAZIONE DI FUNZIONI REALI DI VARIABILI REALI

## § 1 – Metodi di integrazione.

**1.1 –** 1) $\frac{3}{2}b^2x^4 + C$ 2) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{4ax^5} + C$

3) $\frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$ 4) $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}x^{k+1} + C$

5) $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\alpha_k + 1}x^{\alpha_k + 1} + C$

6) $6\sqrt{\frac{3}{5}x} - \frac{9}{\sqrt{5}}x + 2\sqrt{\frac{3}{5}x^3} - \frac{x^2}{2\sqrt{5}} + C.$

**1.2 –** 1) $\frac{1}{\ln a - \ln b}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{b}{a}\right)^x\right] - 2x + C$

2) $\frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + C$

3) $-\mathrm{cotan}x + C$

4) $\mathrm{Th}x + C$

5) $= \frac{1}{2}\int(\sin 8x - \sin 2x)dx = -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C$

6) $= \frac{1}{8}\int(\cos 10x + 3\cos 4x + 3\cos 2x + \cos 8x)dx =$
$= \frac{\sin 10x}{80} + \frac{3\sin 4x}{32} + \frac{3\sin 2x}{16} + \frac{\sin 8x}{64} + C$

7) $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

8) $= \int[(1 + \tan^2 x) - 1]dx = \tan x - x + C$

9) $= \int\left(\frac{x^3+1}{x+1} - \frac{2}{x+1}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2\ln|x+1| + C.$

**1.3 –** 1) Ponendo $t = x^2$ si ha $\frac{1}{2}\int 5^t dt = \frac{5^t}{2\ln 5} + C$, da cui l'integrale cercato risulta $\frac{5^{x^2}}{2\ln 5} + C$

2) si ponga $t = \sin x$, $\frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C$

3) si ponga $t = \mathrm{Sh}x$, $\frac{\mathrm{Sh}^4 x}{4} + C$

4) $= \int \cos x(1 - \sin^2 x)dx$, si ponga $t = \sin x$,

$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

5) si ponga $t = \mathrm{Ch}x$, $\frac{\mathrm{Ch}^3 x}{3} - \mathrm{Ch}x + C$;

6) si ponga $t = x^2 + 1$, $\sqrt{x^2+1} + C$

7) si ponga $t = \frac{1}{x}$, $-e^{1/x} + C$

8) si ponga $t = 2^x + 3$, si ha

$\frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t(t-3)} = -\frac{1}{3\ln 2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{3\ln 2}\int \frac{dt}{t-3} =$

$= -\frac{\ln|t|}{3\ln 2} + \frac{\ln|t-3|}{3\ln 2} + C$, da cui $-\frac{\ln(2^x+3)}{3\ln 2} + \frac{x}{3} + C$

9) $= \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int \frac{\ln x}{x}dx$, si ponga nel secondo integrale

$t = \ln x$, $2\sqrt{x} - \frac{\ln^2 x}{2} + C$

10) si ponga $t = 1 - \cos x$, $-\frac{1}{2(1-\cos x)^2} + C$

11) si ponga $t = \ln x$, $-\frac{1}{\ln x} + C$.

**1.4 –** 1) $\ln|f(x)| + C$ 2) $\ln(1 + e^x) + C$
3) $-\ln|\cos x| + C$ 4) $-\ln|\sin x + \cos x| + C$.

**1.5 –** 1) $t = \mathrm{Th}x$, $\frac{3^{\mathrm{Th}x}}{\ln 3} + C$

2) $t = \frac{x}{a}$, $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

3) $t = \frac{x}{\sqrt{8}}$, $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C$



4) $t = \frac{x^2}{4}$, $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2}{4}\right) + C$

5) $t = \sqrt{x+1}$, $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$

6) $t = x^n$, $-\frac{1}{n}\cos(x)^n + C$

7) $t = 1 + 3\cos^2 x$, $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3} + C$

8) $t = \tan x$, $\frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x} + C$

9) $t = e^x$, $\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C$, da cui

$\ln\frac{e^x}{e^x+1} + C$.

**1.6 –** 1) $= \int \frac{4dx}{\sin^2(2x)}$, si ponga $t = \mathrm{cotan}(2x)$; $-2\mathrm{cotan}(2x) + C$

2) $= \int \frac{x}{1+4x^2}dx - \int \frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx$, si ponga nel primo integrale $t = 1 + 4x^2$ e nel secondo $u = \arctan 2x$;

$\frac{1}{8}\ln(1+4x^2) - \frac{1}{3}\sqrt{\arctan^3 2x} + C$

3) $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 - \sqrt{1-x^2} + C$

4) $x = a\sin t$, $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

5) $\arctan(\mathrm{Th}x) + C$.

**1.7 –** 1) $x = \sin t$, si ha $\int \cos^2 t dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt =$

$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$, da cui

$\frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$

2) $x = a\mathrm{Sh}t$, $\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right) + \frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right] + C$.

**1.8 –** $\dfrac{a}{2}\ln(x^2+px+q)+\dfrac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\left(\dfrac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)+C.$

**1.9 –** 1) $\displaystyle\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$

2) $x(\ln x-1)+C$ 3) $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\dfrac{1}{n+1}\right)+C$

4) $x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ 5) $\ln x(\ln(\ln x)-1)+C$

6) $\dfrac{1}{2}(1+x^2)\arctan x-\dfrac{x}{2}+C$ 7) $\sin x-x\cos x+C$

8) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$ 9) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$

10) $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

11) $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}dx=\int x^2\cdot(xe^{-x^2})dx=-\frac{x^2}{2}e^{-x^2}+\int xe^{-x^2}dx=$

$\displaystyle=-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)+C$

12) $\dfrac{1}{2}\left(\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}\right)+C$

13) $\displaystyle\int x\arccos x\,dx=\frac{1}{2}x^2\arccos x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2\arccos x+\frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}dx\right]=$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2\arccos x-\frac{x}{8}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin x+C$ (vedi XI.1.7).

**1.10 –** 1) $\displaystyle\int\sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+\int\cos^2 x\,dx=$

$\displaystyle=-\sin x\cos x+\int(1-\sin x^2)dx$, da cui

$\displaystyle\int\sin^2 x\,dx=\frac{x-\sin x\cos x}{2}+C$

2) $\displaystyle\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx=$

$\displaystyle=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]-\int\sin(\ln x)dx$, da cui

$\displaystyle\int\sin(\ln x)dx=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$

3) $\dfrac{1}{5}x\left[2+\cos^2(\ln x)+\sin(2\ln x)\right]+C$



4) $\dfrac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\left(\sin bx-\dfrac{b}{a}\cos bx\right)+C.$

**1.11 –** 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^4 x}=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx+$

$\displaystyle+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos x}{\sin^3 x}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$

$\displaystyle=-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}-\frac{2}{3}\text{cotan }x+C$

2) $\displaystyle\int\frac{x}{\sin^2 x}dx=$

$\displaystyle=-x\text{cotan}x+\int\text{cotan}x\,dx=-x\text{cotan}x+$

$+\ln|\sin x|+C$ (vedi XI.1.2).

**1.12 –** 1) $\ln|x-a|+C$ se $n=1$;

$\dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$ se $n>1$.

2) $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ se $n=1$;

$\dfrac{1}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}}+C$ se $n>1$.

**1.13 –** Integrando per parti si ha:

$\displaystyle I_n(x)=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx=\frac{x}{(1+x^2)^n}+$

$+2nI_n(x)-2nI_{n+1}(x)$

da cui

$\displaystyle I_n(x)=\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)I_{n-1}(x).$

**1.14 –** $\displaystyle I_n(x)=\frac{4^n}{(4q-p^2)^n}\cdot\int\frac{dx}{\left[1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2\right]^n}$, mediante

sostituzione si riconduce a XI.1.13, da cui

$\displaystyle I_n(x)=\frac{2x+p}{(4q-p^2)(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}+$

$\displaystyle+\frac{8(2n-3)}{(n-1)(4q-p^2)}I_{n-1}(x).$

**1.15 –** $$J_n(x) = \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{[(2x+p)^2+4q-p^2]^n}dx + \int \frac{b-\frac{ap}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx$$
da cui l'asserto.

**1.16 –** 1) Per il teorema citato si possono determinare in modo unico i numeri A, B, C, D, E, F tali che
$$\frac{2x^5+3x^4-3x^3+8x^2-5x+3}{(x^2+1)^2(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}.$$
Dalla precedente uguaglianza si ottiene il sistema lineare seguente
$$\begin{cases} B+E=2 \\ A-B-2E+F=3 \\ 2B+C+2E-2F=-3 \\ 2A-2B-2C+D-2E+2F=8 \\ B+C-2D+E-2F=-5 \\ A-B+D+F=3 \end{cases}$$
da cui $A=B=2$, $C=-1$, $D=E=0$, $F=3$.
Quindi l'integrale cercato è
$$-\frac{2}{x-1}+2\ln|x-1|+\frac{\frac{1}{2}}{1+x^2}+3\arctan x+C.$$

2) $$= \frac{1}{5}\left\{\int \frac{7}{x-2}dx+\int\frac{3x}{x^2+1}dx+\int\frac{6}{x^2+1}dx\right\} = \frac{1}{5}\left\{7\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+6\arctan x\right\}+C.$$

3) $$= \int\frac{5}{x-2}dx-\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\int\frac{2}{x-1}dx = 5\ln|x-2|+\frac{1}{3(x-1)^3}-2\ln|x-1|+C$$



4) $$= \frac{1}{2}\int\frac{2x-7}{x^2-7x+6}dx+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{(x-1)(x-6)} = \frac{1}{2}\ln|x^2-7x+6|+\frac{7}{10}\left[\int\frac{dx}{x-6}-\int\frac{dx}{x-1}\right] = \frac{1}{2}\ln|x^2-7x+6|+\frac{7}{10}\ln\left|\frac{x-6}{x-1}\right|+C.$$

5) Porre $t=x^2-3x+2$; si ottiene $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2-3x+2)^2}+C$.

6) $$= \frac{1}{4}\left\{-\int\frac{2dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+1}\right\} = -\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

**1.17 –** 1) $$\int\frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx = x-\int\frac{5x+3}{x^2+3x+4}dx = x-\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4)+\frac{9}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)+C$$

2) $x+\frac{25}{3}\ln|x-5|-\frac{4}{3}\ln|x-2|+C$

3) $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$

4) $5x+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{161}{6}\ln|x-4|+C$

5) $\frac{x}{4}+\ln|x|-\frac{7}{4}\ln|2x-1|-\frac{9}{4}\ln|2x+1|+C.$

**1.18 –** 1) $$= \int\frac{11x-19}{(x^2-4x+5)^2}dx+\int\frac{x+4}{x^2-4x+5}dx = \frac{11}{2}\int\frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^2}dx+3\int\frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}+\int\frac{x+4}{x^2-4x+5}dx = -\frac{11}{2(x^2-4x+5)}+\frac{3x-6}{2(x^2-4x+5)}+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+12\arctan(x-2)+C.$$

2) $$= \int\frac{dx}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+2\arctan(\sqrt{2}x+1)-\right.$$

$$\left.-2\arctan(\sqrt{2}x-1)\right\}+C$$

3) $= \int\frac{dx}{x^6}-\int\frac{dx}{x^4}+\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{1+x^2}=$

$$= -\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\arctan x+C.$$

1.19 – 1) $t=e^x$, l'integrale è $\frac{1}{9}\ln|1-3e^{-x}|+\frac{e^{-x}}{3}+C$

2) $t=\tan x$, $\ln\left|\frac{(\tan x+1)^3}{\tan^2 x+\tan x+1}\right|+C$

3) $t=\sin x$, $\ln\left|\frac{\sin^3 x}{\cos x}\right|+\frac{1}{2\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}+C$

4) $t=\sqrt{\tan x}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}\right)+$

$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\arctan(\sqrt{2\tan x}-1)+\arctan(\sqrt{2\tan x}+1)\right\}+C$ (vedi XI.1.18,2))

5) $t=e^x$, $\ln\left|\mathrm{Th}\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C$

6) $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\sqrt{3}}\right]-$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\frac{3\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2\sqrt{2}}\right]+C$$

7) $t=x^{1/6}$, $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$

8) $t=\sqrt{x^2+1}$, $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C.$

1.20 – 1) $1+\sqrt[4]{x}=t^3$, $\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3}-3(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}+C$

2) $1+2x^2=t^2$, $\frac{\sqrt{1+2x^2}}{4}+\frac{1}{12\sqrt{(1+2x^2)^3}}+C$



3) $1+x^5=t^3$, $\frac{1}{5}\ln|\sqrt[3]{1+x^5}-1|-\frac{1}{10}\ln\left(\sqrt[3]{(1+x^5)^2}+\right.$

$$\left.+\sqrt[3]{1+x^5}+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{5}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

4) $1+x^{-3/4}=t^3$, $-2\frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^2}}{\sqrt{x}}+C$

5) $2-3x^{1/4}=t^2$, $-\frac{8}{3^{10}}\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(-1)^k\cdot\frac{2^{9-k}}{2k+1}(2-3x^{1/4})^{k+\frac{1}{2}}+C$

6) $ax+b=t^3$, $\frac{3}{a^2}\left[\frac{2ax+3b}{2(ax+b)^{2/3}}\right]+C.$

1.21 – 1) $1-x^2=t^2$, $-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}+C$

2) $x^2-1=t^2$, $\frac{\sqrt{x^2-1}}{4x^4}+\frac{3}{4}\left\{\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}+\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x^2-1}\right\}$ (vedi XI.1.13)

3) $2x+3=t^2$, $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}+C.$

1.22 – 1) $\sqrt{x^2-6x-7}=x+t$, $-\frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2-6x-7}-x+3\right)+$

$$+8\ln|\sqrt{x^2-6x-7}-x+3|+\frac{32}{(\sqrt{x^2-6x-7}-x+3)^2}+C$$

2) $\sqrt{x^2+x}=x+t$, $-\frac{1}{32}\left(2\sqrt{x^2+x}-2x+1\right)^2-$

$$-\frac{1}{4}\ln|2\sqrt{x^2+x}-2x-1|+$$

$$+\frac{3}{8(2\sqrt{x^2+x}-2x-1)}+\frac{3}{32(2\sqrt{x^2+x}-2x-1)^2}+C$$

3) $\sqrt{x^2-x+1}=x+t$, $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-x+1}-\frac{x}{2}-$

$$-3\ln|2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1|-$$

$$-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2-x+1}-x}{1-\sqrt{x^2-x+1}+x}\right|-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+2\sqrt{x^2-x+1}-2x}+C$$

4) $(4x^2-24x+27)^{1/2}=2x+t$,

$$\frac{1}{12\{(4x^2-24x+27)+(4x^2-24x+27)^{1/2}(6-2x)\}}+C.$$

**1.23 –** 1) $\int x^2\cos^2 3x dx = x^2\int \cos^2 3x dx - 2\int x\left(\int \cos^2 3x dx\right)dx =$

$= \ldots = \frac{1}{6}\left\{x^3 + \frac{x^2}{2}\sin 6x + \frac{x}{6}\cos 6x - \frac{1}{36}\sin 6x\right\} + C$

2) $\frac{1}{4}e^{2x}\left(\sin^2 x - \sin x\cos x + \frac{1}{2}\right) + C$

3) $\frac{xe^x}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{e^x}{2}\sin x + C$

4) $\ln\left|\frac{(e^x-1)^{1/3}(e^x+2)^{1/6}}{e^{x/2}}\right| + C$

5) $\frac{x^3}{3}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3}\ln(1-x^2) + C$

6) $\frac{\sin x\mathrm{Ch}x - \cos x\mathrm{Sh}x}{2} + C$

7) $\sqrt{1+\sqrt{x}} = t$, $\frac{4}{5}\sqrt{(1+\sqrt{x})^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + C$

8) $\sqrt{x} = t$, $-x - 2\sqrt{x} + \frac{1}{1-2\sqrt{x}} + C$

9) $\sqrt{4x^2-2x+1} = 2x+t$, $\frac{22}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{4x^2-2x+1}-4x+1}{\sqrt{3}} +$

$+ \frac{7+8x-4\sqrt{4x^2-2x+1}}{6[8x^2-4x+2-(4x-1)\sqrt{4x^2-2x+1}]} + C$

(vedi XI.1.8 e XI.1.15)

10) $-\frac{\arctan x}{x} + \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) + C$

11) $\frac{x^3}{3}\arctan 3x - \frac{x^2}{18} + \frac{1}{162}\ln(1+9x^2) + C.$

**1.24 –** 1) $= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^{3/2}}dx + \int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} - \int \frac{dt}{t^2}$,

dove $t^2 = \frac{1}{x^2} + 1$, da cui $\frac{x-1}{(x^2+1)^{1/2}} + C$

2) ponendo $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$ si ottiene $\int \frac{2dt}{t^2-1} =$

$= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$, da cui $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1}\right| + C$

3) $\frac{5}{2}\sqrt[5]{\cos^2 x}\left(\frac{\cos^2 x}{6} - 1\right) + C$

4) ponendo $t = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ si ha $\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) +$



$+2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

5) ponendo $t^2 = 1 + \frac{1}{x^4}$ si ha $\frac{5}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right| + C$

6) $\frac{x}{3}\tan 3x + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + C$

7) $\frac{1}{6}(x^3-1)\ln|1-x| - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6} + C$

8) $-\frac{x}{\mathrm{Th}x} + \ln|\mathrm{Sh}x| + C$

9) $\frac{1}{\ln 4}\ln\left|\frac{2^x+1}{2^x-1}\right| + C$

10) $= \frac{x^2}{2}\arctan(2x+3) - \int \frac{x^2}{1+(2x+3)^2}dx =$

$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\arctan(2x+3) +$

$+\frac{3}{8}\ln\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right) - \frac{x}{4} + C$

11) $\mathrm{sgn}\, x \cdot \frac{x^2}{2} + C$

12) $= -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\arcsin x}{x} +$

$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + C$

**1.25 –** 1) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right| + C$

2) $\int \frac{dx}{2+\cos x} = 2\int \frac{dt}{\cos^2 t(3+\tan^2 t)} =$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C$

3) $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \int \frac{dx}{\sqrt{5}\cos(x-\alpha)+3} = \ldots =$

$$= \arctan \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}-\cos x - 2\sin x)}{(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\cos x + 2\sin x)}} + C.$$

**1.26 –** 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int \frac{\tan x \cdot \sin x}{\cos^{n-3} x}dx =$

$\displaystyle= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} + (n-2)\int \frac{dx}{\cos^{n-4} x}.$

2) $\displaystyle\frac{1}{m}\cdot\frac{\sin^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m}\int \frac{\sin^{n-1} x}{\cos^{m-1} x}dx.$

3) $\displaystyle\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln^n x - \frac{n}{n+1}\int x^n \ln^{n-1} x dx.$

4) $\displaystyle\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x +$

$\displaystyle+(n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = -\cos x \sin^{n-1} x +$

$\displaystyle+(n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx$, da cui

$\displaystyle\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx.$

5) $\displaystyle\frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+1} - \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{n+2} x \cos^{m-2} x dx$ (vedi 3)).

6) $\displaystyle\int \mathrm{Ch}^n x dx = \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}^{n-1} x - (n-1)\int \mathrm{Ch}^n x dx +$

$\displaystyle+(n-1)\int \mathrm{Ch}^{n-2} x dx$, da cui

$\displaystyle\int \mathrm{Ch}^n x dx = \frac{\mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{Ch}^{n-2} x dx.$

**1.27 –** 1) $\displaystyle -x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)\int x^{n-2}\sin x dx.$

2) $\displaystyle -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}dx$

3) $\displaystyle\int (a^2+x^2)^n dx = a^{2n+1}\int \mathrm{Ch}^{2n+1} t dt = \ldots =$

$\displaystyle= \frac{x(a^2+x^2)^n}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1}a^2\int (a^2+x^2)^{n-1}dx.$



**1.28 –** 1) Suddividendo l'intervallo $[0,a]$ in $n$ parti uguali, si ha

$$\int_0^a e^x dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a}{n}e^{\frac{ka}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n}\cdot\frac{e^a-1}{e^{a/n}-1} = e^a - 1$$

2) $\displaystyle\int_0^a x^3 dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}\left(\frac{ka}{n}\right)^3 =$

$\displaystyle= \lim_{n\to+\infty}\frac{a^4}{n^4}\cdot\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2 = \frac{a^4}{4}$

3) $\displaystyle\int_0^a \cos x dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}\cos\left(\frac{ka}{n}\right) =$

$\displaystyle= \lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{a}{n}\cdot\frac{\sin\frac{a}{n}\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2n}} - \frac{a}{2n}\right\} = \sin a$

**1.29 –** 1) $\displaystyle\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln(3+2\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2}\right]$ 2) $\displaystyle\frac{5}{2}\sqrt{3} - \ln(2+2\sqrt{3})$ 3) 3.

**1.30 –** 1) $\displaystyle\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{x-2\sqrt[3]{x+4}} = \int_0^1\frac{3t^2}{t^3-4-2t} = \int_0^1\frac{6dt}{t-2}+$

$\displaystyle-3\int_0^1\frac{t-2}{t^2-2t+2}dt = \left[6\ln|t-2| - \frac{3}{2}\ln(t^2-2t+2)+\right.$

$\displaystyle\left.+3\arctan(t-1)\right]_0^1 = \frac{3}{4}\pi - \frac{9}{2}\ln 2$

(vedi XI.1.8).

2) $\displaystyle= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sin^2 x - 1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

3) $\displaystyle= \left[1+t+4\sqrt{1+t}+\ln|\sqrt{1+t}-1|\right]_x^3 = 11 - x +$

$-4\sqrt{1+x} + 4\ln|\sqrt{1+x}-1|$

**1.31 –** 1) Usando il risultato XI.1.26, 4), si ha che l'integrale richiesto è

$\displaystyle\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots n}\cdot\frac{\pi}{2}$ se $n$ è pari

$\displaystyle\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots n}$ se $n$ è dispari.

2) Usando il risultato XI.1.27, 1), si ha che l'integrale richiesto

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]-1} (-1)^k (2k)! \binom{n}{2k} \frac{1}{\pi^{1+2k}} + \frac{A}{\pi^{n+1}},$$

dove

$$A = \binom{n}{2\left[\frac{n}{2}\right]} \left(2\left[\frac{n}{2}\right]\right)! \cdot 2 \text{ se } n \text{ è pari,}$$

$$A = \binom{n}{2\left[\frac{n}{2}\right]} \left(2\left[\frac{n}{2}\right]\right)! \cdot \pi \text{ se } n \text{ è dispari.}$$

**1.32** – 1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $\ln 4$

3) $-1$ 4) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

5) $\frac{1}{2\ln^2 2}$.

**1.33** – 1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = [2\arctan\sqrt{x}]_0^a + [2\arctan\sqrt{x}]_a^{+\infty} = \pi$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+4} = \left[\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)\right]_{-\infty}^{a} +$

$\displaystyle + \left[\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)\right]_a^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{7}}\pi$

3) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x+1}} = \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x+1}} + \int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x+1}} =$

$\displaystyle = \left[\ln\left|\frac{1+\sqrt{2+\frac{1}{x}}}{1-\sqrt{2+\frac{1}{x}}}\right|\right]_0^{1/2} = \ln 3.$

4) $\ln\sqrt{2}$.

**1.34** – 1) $e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$ definitivamente per $x \to +\infty$; poiché

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, ne segue che $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ esiste finito.

2) Esiste finito poiché $\frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ definitivamente per $x \to 0^+$.



3) Non esiste finito poiché per $x \to +\infty$ è

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}\ln(1+\sqrt{x})} > \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4) Esiste finito poiché $\dfrac{e^{-x}}{\sin\frac{1}{x}} < \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$.

5) Per $\alpha = 1$, poiché $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^\beta x} = \frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1}x}$, se $\beta \neq 1$

e $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|$, si ha che l'integrale esiste finito per $\beta > 1$.

Ogni altro caso si riconduce a questo mediante confronto, e si ottiene:

$\alpha < 1$ l'integrale non esiste finito qualunque sia $\beta$,

$\alpha > 1$ l'integrale esiste finito qualunque sia $\beta$.

**1.35** – 1) $\displaystyle\int_a^k \frac{\sin x}{x}dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_a^k - \int_a^k \frac{\cos x}{x^2}dx$, poiché il limite per $k \to +\infty$ del primo termine a secondo membro esiste finito e esiste $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$, l'integrale dato esiste finito.

2) $\displaystyle\int_a^k \cos x^2 dx = \int_{a^2}^{k^2} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}dt = \left[\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\right]_{a^2}^{k^2} + \frac{1}{4}\int_{a^2}^{k^2} \frac{\sin t}{t^{3/2}}dt,$
dove $t = x^2$, quindi l'integrale dato esiste finito.

3) $\displaystyle\int \frac{x}{(1-x^2)^2}\cos\frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{1-x^2} + C$, da cui, ad esempio, non esiste $\displaystyle\int_0^1 \ldots$.

Si noti che esiste finito $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \ldots\ldots = 0.$

## § 2 – Proprietà delle funzioni integrabili

**2.1** – $E(f) = \{t : t < 1\}$, $f \in C(E(f))$;

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty} f(t) = +\infty, \lim_{t\to 1^-} f(t) = \int_0^1 \ln\left(1 - e^{\frac{x-1}{x^2}}\right)dx < 0;$

$Z(f) = \{0\}, P(f) = \{t : t < 0\}$;

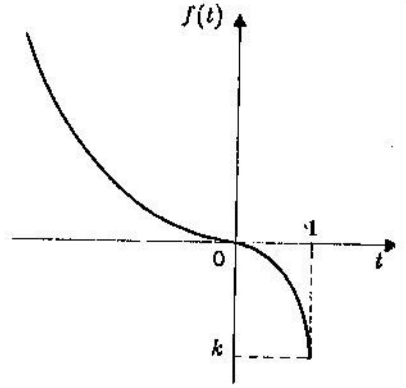
$$f'(t) = \begin{cases} \ln\left(1 - e^{\frac{t-1}{t^2}}\right) & \text{per} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad t = 0 \end{cases},$$

$E(f') = E(f),\ Z(f') = \{0\},\ P(f') = \emptyset$,

$t = 0$ punto di flesso a tangente orizzontale,

$\lim_{t\to 1^-} f'(t) = -\infty,\ \lim_{t\to -\infty} f'(t) = -\infty$;

$$f''(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{t-1}{t^2}}}{\left(1 - e^{\frac{t-1}{t^2}}\right) t^3} \cdot (t-2) & \text{per} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad t = 0, \end{cases}$$




$E(f'') = E(f),\ Z(f'') = \{0\},\ P(f'') = \{t : t < 0\}$.

**2.2** – $E(f) = \mathbb{R}^+ - \{0\},\ f \in C(E(f))$;

$$\lim_{x\to 0^+} f(x;\lambda) = \int_1^0 e^{-\lambda t} \ln t\,dt = b_\lambda > 0,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x;\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\lambda t} \ln t\,dt = a_\lambda > 0 & \text{se} \quad \lambda > 0 \\ +\infty & \text{se} \quad \lambda \leq 0, \end{cases},$$

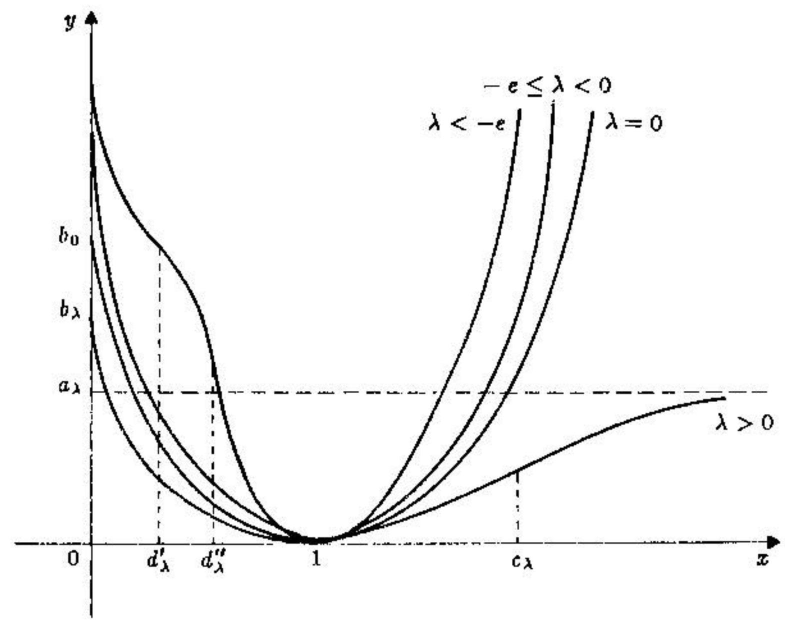
se $\lambda > \lambda' > 0$ è $a_\lambda < a_{\lambda'}$; $Z(f) = \{1\}$, $P(f) = E(f) - \{1\}$;
$f'(x;\lambda) = e^{-\lambda x} \ln x$, $E(f') = E(f)$, $Z(f') = \{1\}$,
$P(f') = \{x : x > 1\}$, $x = 1$ punto di minimo.



$$\lim_{x\to 0^+} f'(x;\lambda) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty} f'(x;\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \lambda > 0 \\ +\infty & \text{se} \quad \lambda \leq 0 \end{cases};$$

$f''(x;\lambda) = e^{-\lambda x}\left(\dfrac{1}{x} - \lambda \ln x\right)$, confrontando le curve $\dfrac{1}{x}$ e $\lambda \ln x$ si ottiene: se $-e < \lambda \leq 0$, $Z(f'') = \emptyset$, $P(f'') = E(f)$; se $\lambda > 0$, $Z(f'') = \{c_\lambda\}$, $c_\lambda > 1$, $P(f'') = \{x : 0 < x < c_\lambda\}$, $x = c_\lambda$ punto di flesso discendente; se $\lambda = -e$, $Z(f'') = \{d_\lambda\}$, $d_\lambda < 1$, $P(f'') = E(f) - \{d_\lambda\}$; se $\lambda < -e$, $Z(f'') = \{d'_\lambda, d''_\lambda\}$, $d'_\lambda < d''_\lambda < 1$, $P(f'') = \{x : x < d'_\lambda | x > d''_\lambda\}$, $x = d'_\lambda$ punto di flesso discendente, $x = d''_\lambda$ punto di flesso ascendente.




**2.3** – Sia $f$ non decrescente e sia $X = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una suddivisione di $[a, b]$.

$S(X) - s(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(L_i - l_i)$, dove $L_i = \sup_{x_{i-1} \leq x < x_i} f(x)$

e $l_i = \inf_{x_{i-1} \le x < x_i} f(x)$; se $\delta = \max_i (x_i - x_{i-1})$ è

$S(X) - s(X) \le \delta.\ \ \sum_{i=1}^{n} (L_i - l_i) = \delta[f(b) - f(a)]$, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ se $\delta < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ è $S(X) - s(X) < \varepsilon$, da cui l'asserto.

**2.4** – Per ogni suddivisione $X$ di $[0,1]$ è $S(X) = 1$ e $s(X) = 0$, da cui l'asserto.

**2.5** – $x_n$ è la somma di Riemann della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ relativa all'intervallo $[0,1]$ ed alla suddivisione di tale intervallo in $n$ parti uguali, con la funzione calcolata in $x = \dfrac{p}{n}$. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

**2.6** – $$|g(y+h) - g(y)| = \left| \int_{\phi(y)}^{\phi(y+h)} f(x)dx \right| \le$$
$$\le |\phi(y+h) - \phi(y)| \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

per la continuità di $\phi$ l'ultimo termine tende a zero per $h \to 0$. Si noti che basta la limitatezza di $f$.

**2.7** –

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{per} \quad x = 0 \\ 0 & \text{per} \quad x \neq 0 \end{cases}.$$

$$I_n = -\frac{1}{\ln n} \cdot \ln(\ln n + 1) + \frac{1}{2 \ln n} \ln(1 + n \ln n) \to \frac{1}{2}$$

per $n \to +\infty$.

**2.8** – $F(y) = G[\phi(y)]$, dove $G(u) = \int_a^u f(x)dx$, da cui $F'(y) = f(\phi(y)) \cdot \phi'(y)$.

∘ **2.9** – Fissato $\varepsilon > 0$ sia $n$ tale che suddividendo $[a,b]$ in $n$ parti uguali sia $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{b-a}{n}(L_i - l_i) < \dfrac{\varepsilon}{3}$, dove $L_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$, $l_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$, $I_i = \left[a + \dfrac{i-1}{n}(b-a), a + \dfrac{i}{n}(b-a)\right]$.



Siano $\tilde{k}(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i \chi_{I_i}(x)$ e $\tilde{h}(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i \chi_{I_i}(x)$, allora $\tilde{h}(x) \le f(x) \le \tilde{k}(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Fissato $\delta < \dfrac{b-a}{n}$ si costruisca $k(x)$ nel modo seguente:

se $L_i > L_{i+1}$ si congiungono con un segmento i punti

$$\left(a + \frac{i}{n}(b-a), L_i\right) \text{ e } \left(a + \frac{i}{n}(b-a) + \delta, L_{i+1}\right),$$

se $L_i < L_{i+1}$ si congiungono con un segmento i punti

$$\left(a + \frac{i}{n}(b-a) - \delta, L_i\right) \text{ e } \left(a + \frac{i}{n}(b-a), L_{i+1}\right),$$

altrove si ponga $k(x) = \tilde{k}(x)$. Allora $k(x) \ge \tilde{k}(x), k \in C([a,b])$ e $\int_a^b (k(x) - \tilde{k}(x))dx \le \dfrac{n-1}{2} M \cdot \delta$, dove $M = 2 \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Analogamente si costruisce $h$ partendo da $\tilde{h}$.

Scelto $\delta < \dfrac{2\varepsilon}{3(n-1)M}$ è

$$\int_a^b (k(x) - h(x))dx = \int_a^b (k(x) - \tilde{k}(x))dx + \int_a^b (\tilde{k}(x) - \tilde{h}(x))dx +$$
$$+ \int_a^b (\tilde{h}(x) - h(x)dx < \varepsilon.$$

∘ **2.10** – $$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_i)g(x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) \le$$
$$\le \frac{b-a}{n} \left( \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)]^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^{n} [g(x_i)]^q \right)^{1/q} =$$
$$= \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} [f(x_i)]^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} [g(x_i)]^q \right)^{1/q};$$

facendo tendere $n$ a $+\infty$ si ha l'asserto.

∘ **2.11** – $$\int_a^b f(x)\{f(x) + g(x)\}^{p-1} dx \le \left( \int_a^b [f(x)]^p dx \right)^{1/p} \cdot$$
$$\cdot \left( \int_a^b \{f(x) + g(x)\}^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

$$\int_a^b g(x)\{f(x)+g(x)\}^{p-1}dx \le \left(\int_a^b [g(x)]^p dx\right)^{1/p} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_a^b \{f(x)+g(x)\}^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} ;$$

sommando le due diseguaglianze membro a membro, si ha

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}^p dx \le \left(\int_a^b \{f(x)+g(x)\}^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left(\int_a^b [f(x)]^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b [g(x)]^p dx\right)^{1/p} \right\}$$

da cui l'asserto.

**2.12** – Se $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, sia $g$ costruita come la $k$ (o la $h$) in XI.2.9, in modo che $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2M^{p-1}}$; allora

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx \le \int_a^b |f(x)-g(x)| \cdot (2M)^{p-1} dx < \varepsilon.$$

**2.13** – $\left(\int_a^b (T-\varepsilon)^n \chi_{[x_1,x_2]}(x)dx\right) = (T-\varepsilon)\cdot(x_2-x_1)^{1/n} \to T-\varepsilon$ per $n \to +\infty$,

$\left(\int_a^b T^n \chi_{[a,b]}(x)dx\right)^{1/n} \to T$ per $n \to +\infty$, da cui per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ si ha l'asserto (vedi suggerimento).

**2.14** – Ponendo in VIII.3.18, $f(x) = \int_a^x |h(t)-g(t)|dt$ si ha l'asserto.

**2.15** – (vedi suggerimento).

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^b g(t)dt - \int_{f(a)}^{f(b)} \left(\int_a^{f^{-1}(v)} g(u)du\right) dv =$$

$$= f(b)\int_a^b g(t)dt - [f(b)-f(a)]\cdot \int_a^\xi g(u)du =$$

$$= f(a)\int_a^\xi g(t)dt - f(b)\int_\xi^b g(t)dt$$



dove $\xi \in (a,b)$. (È stato usato il teorema della media).

**2.16** – 1) $f_n$ è un polinomio dispari, $g_n$ è un polinomio pari.

2) Fissato $x > 0$, è

$$f_n(x) = 1 - \frac{\int_x^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt},$$

per $(a)$ e $(b)$ si ha

$$\frac{\int_x^1 (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt} \le \frac{\int_x^1 \frac{t}{x}(1-t^2)^n dt}{\int_0^1 t(1-t^2)^n dt} = \frac{(1-x^2)^{n+1}}{x} \to 0$$

per $n \to +\infty$.

Se $x = 0$, $f_n(0) = 0$; se $x < 0$ poiché gli $f_n$ sono dispari $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -1$.

3) Poiché $f_n'(x) > 0$ per $x > 0$, allora per $x \ge \alpha > 0$ si ha $0 < 1 - f_n(x) \le 1 - f_n(\alpha) \to 0$ per $n \to +\infty$, quindi si ha la convergenza uniforme su $[\alpha, 1]$. Per la discontinuità della funzione limite in 0, la convergenza non è uniforme in ogni intervallo $[-\alpha, \alpha]$.

4) per $x > 0$

$$0 \le x - g_n(x) = \int_0^x [1-f_n(t)]dt \le \int_0^{\varepsilon/4} [1-f_n(t)dt +$$

$$+ \int_{\varepsilon/4}^1 [1-f_n(t)]dt \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

per $n \ge N(\varepsilon)$, per la convergenza uniforme di $f_n$ in $[\varepsilon/4, 1]$. Poiché $g_n$ è pari si ha l'asserto.

Capitolo XII

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI ELEMENTARI

## § 1 – Equazioni differenziali del I ordine

1.1 – La famiglia di funzioni date dalla formula (1) è definita su tutto $I$, inoltre non dipende né dalla scelta della primitiva $A$ né da quella indicata esplicitamente nella (1): una diversa scelta delle due primitive modificherebbe solo la costante arbitraria $c$.

Per ogni $c \in \mathbb{R}$, $y_c \in C^1(I)$ e una immediata verifica mostra che $y_c$ è soluzione dell'equazione data.

Sia ora $\varphi \in C^1(I)$ una soluzione dell'equazione, cioè

$$\varphi'(x) + P(x)\varphi(x) = Q(x), \qquad x \in I;$$

moltiplicando ambo i membri per $e^{A(x)}$ si ottiene

$$D[\varphi(x)e^{A(x)}] = \varphi'(x)e^{A(x)} + P(x)\varphi(x)e^{A(x)} = \\ = Q(x)e^{A(x)}$$

da cui

$$\varphi(x)e^{A(x)} = c + \int e^{A(x)}Q(x)dx$$

per un opportuno $c \in \mathbb{R}$, ne segue che $\varphi$ ha la forma (1).

1.2 – Nella formula (1) di XII.1.1 pensiamo fissata $A$ e $F(x) = \int e^{A(x)}Q(x)dx$. Allora tutte le soluzioni dell'equazione sono della forma

$$y(x) = e^{-A(x)}\left\{c + F(x)\right\}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

La condizione $y(a) = b$ porta all'equazione

$$b = e^{-A(a)}\{c + F(a)\}$$

che ammette una e una sola soluzione

$$\tilde{c} = be^{A(a)} - F(a).$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = e^{-A(x)}\left\{be^{A(x)} + F(x) - F(a)\right\}.$$

Scegliendo

$$A(x) = \int_a^x P(t)dt, \qquad F(x) = \int_a^x e^{A(t)}Q(t)dt,$$

poiché $A(a) = F(a) = 0$, si ha la forma particolarmente espressiva

$$y(x) = e^{-\int_a^x P(t)dt}\left\{b + \int_a^x e^{\int_a^t P(u)du}Q(t)dt\right\}.$$

1.3 – Per $x \neq 0$ l'equazione differenziale si può scrivere nella forma

$$y' + \frac{y}{x} = \arctan x$$

e per XII.1.1 si perviene alla seguente espressione

$$y_c(x) = \frac{1}{|x|}\left\{c + \int |x| \arctan x dx\right\} =$$

$$= \frac{c}{|x|} + \frac{1}{x}\int x \arctan x dx =$$

$$= \frac{c}{|x|} + \frac{x}{2}\arctan x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}\arctan x.$$



Si osservi che l'espressione precedente dà simultaneamente le due famiglie di soluzioni richieste; si osservi inoltre che per l'arbitrarietà della costante $c$ (e quindi del suo segno) l'espressione precedente è equivalente alla seguente

$$y_c(x) = \frac{c}{x} + \frac{x}{2}\arctan x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}\operatorname{arctg} x.$$

Una eventuale soluzione dell'equazione originaria definita su tutto $\mathbb{R}$, deve per $x < 0$ e per $x > 0$ coincidere con una funzione della famiglia trovata.

Si tratta quindi di vedere se esistono una soluzione per $x < 0$ e una per $x > 0$ che si raccordano in $x = 0$ di classe $C^1$ e anche in $x = 0$ soddisfino l'equazione di partenza.

Se esiste una tale soluzione $y(x)$, per l'equazione di partenza deve essere $y(0) = 0$.

Dobbiamo quindi trovare se esistono un valore $c_1$ tale che $\lim_{x\to 0^+} y_{c_1}(x) = 0$ e un valore $c_2$ tale che $\lim_{x\to 0^-} y_{c_2}(x) = 0$; ovviamente deve essere $c_1 = c_2 = 0$.

In questo caso basta mostrare che esistono e coincidono i limiti in $x = 0$ da destra e da sinistra delle derivate, allora per VIII.3.4 la funzione risulta derivabile in $x = 0$ e di classe $C^1$ su $\mathbb{R}$.

Si verifica immediatamente che l'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ è

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x}\arctan x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

1.4 – Per XII.1.2 la soluzione di $(E)$ è data da

$$y(x) = e^{-\int_{-\pi}^x \frac{2}{t}dt}\left\{1 + \int_{-\pi}^x e^{\int_{-\pi}^t \frac{2}{u}du}\sin t dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{x^2}[2 - x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x].$$

Sia $y$ una soluzione periodica di periodo $2\pi$ di $(E_\alpha)$, allora anche $y'$ ha lo stesso periodo e quindi

$$g_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} y(x) = \sin x - y'(x)$$

deve essere periodica di periodo $2\pi$.
Poiché $g_\alpha(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, per essere periodica deve essere identicamente nulla; non essendo $y(x) \equiv 0$ soluzione di $(E_\alpha)$, ne segue che deve essere $\alpha = 0$.
In tal caso tutte le soluzioni sono periodiche.

○ **1.5** – I casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ danno luogo ad una equazione lineare.
Sia ora $\alpha \neq 0, 1$.
Se $\alpha < 0$, le soluzioni devono essere necessariamente positive e mediante la sostituzione indicata si perviene all'equazione lineare

$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$$

da cui

(1) $\quad y(x) = [z(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}} =$

$$= e^{-\int P(x)dx}\left\{c + (1-\alpha)\int e^{(1-\alpha)\int P(x)dx} Q(x)dx\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

dove con $\int P(x)dx$ si intende sempre la medesima primitiva e $y$ si intende definita ove l'espressione in parentesi graffa risulta essere positiva.
Se $\alpha > 0$, $y \equiv 0$ è soluzione dell'equazione.
Le soluzioni positive hanno ancora la forma (1) precedente.
Vanno però distinti i due casi $\alpha > 1$ e $0 < \alpha < 1$.
Se $\alpha > 1$, allora $\frac{1}{1-\alpha} < 0$ e gli eventuali punti ove l'espressione in parentesi graffa si annulla, danno luogo ad asintoti verticali per la soluzione.
Se $0 < \alpha < 1$ allora $\frac{1}{1-\alpha} > 0$ e negli eventuali punti ove si annulla l'espressione tra parentesi, si annulla anche la soluzione.
Dall'equazione si ricava che per gli stessi punti si annulla anche la derivata, si ha quindi un raccordo fra la soluzione data in (1) e la $y \equiv 0$. (Vedi XII.1.7).



○ **1.6** – Si osservi che se $r$ è pari ed $s$ è dispari ancora ci interessano solo le soluzioni positive o nulle, cioè quelle determinate in XII.1.5., ove $\alpha = \frac{s}{r}$.
Se $r$ ed $s$ sono entrambe dispari se $y$ è una soluzione positiva, anche $-y$ è una soluzione.
Consideriamo ora il caso $s$ pari.
Per determinare tutte le soluzioni, anche quelle negative, conviene esprimere la sostituzione per trasformare l'equazione in una lineare nel modo seguente

$$z = \frac{y}{\sqrt[r]{y^s}}$$

dalla quale segue che $z$ e $y$ hanno lo stesso segno. Posto

$$T(x,c) = c + \left(1 - \frac{s}{r}\right)\int e^{\left(1-\frac{s}{r}\right)\int P(x)dx} Q(x)dx,$$

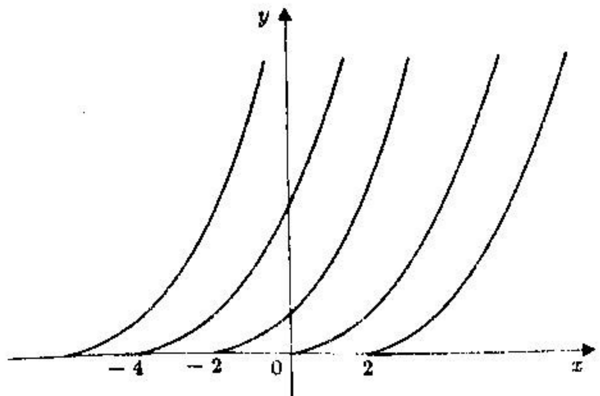
(ove al solito le primitive sono fissate), $z(x)$ ha il segno di $T(x,c)$, quindi le soluzioni sono

$$y(x) = \operatorname{sgn} T(x,c) \cdot e^{-\int P(x)dx} |T(x,c)|^{\frac{1}{1-\frac{s}{r}}}.$$

**1.7** – Oltre alla soluzione $y \equiv 0$, le altre soluzioni (positive) sono

$$y(x) = \left(\frac{x}{2} + c\right)^2, \qquad x \geq -c.$$

Si noti che per $x = -c$ si ha il raccordo con $y = 0$.



1.8 – L'equazione proposta è del tipo di Bernoulli (XII.1.6). Posto $z = y^3$ si ottiene l'equazione lineare

$$z' = \frac{\alpha}{x} z + \frac{\ln x - 1}{x}.$$

Da cui per XII.1.1, se $\alpha \neq 0$

$$z_\alpha(x) = cx^\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln x + \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}$$

se $\alpha = 0$

$$z_0(x) = c + \frac{1}{2} \ln^2 x - \ln x$$

e

$$y_\alpha(x) = \sqrt[3]{z_\alpha(x)}.$$

Per $\alpha = 2$ è

$$y_2(x) = \sqrt[3]{cx^2 - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{4}};$$

poiché $\lim_{x \to 0^+} y_2(x) = +\infty$, non esistono soluzioni di segno costante negativo.
Allora deve essere

$$cx^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} \ln x \quad \text{per} \quad x > 0.$$

Per $c \leq 0$ la precedente disuguaglianza non può essere verificata su $(0, +\infty)$.
Sia $c > 0$ e confrontiamo le funzioni

$$g_1(x) = cx^2 + \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad g_2(x) = \frac{1}{2} \ln x :$$

le due curve di concavità opposta hanno la stessa derivata in $x = \frac{1}{2\sqrt{c}}$, deve quindi essere

$$g_1\left(\frac{1}{2\sqrt{c}}\right) \geq g_2\left(\frac{1}{2\sqrt{c}}\right),$$

da cui $c \geq \frac{1}{4e^2}$.



1.9 – Per $b = 0$, la soluzione è $y(x) \equiv 0$.
Sia $b \neq 0$. L'equazione è del tipo di Bernoulli e la soluzione è

$$y(x) = \frac{e^{-x^2}}{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{b}}.$$

La soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $b > 0$.
Perché sia limitata superiormente da 3, deve essere verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$ la disuguaglianza

$$e^{-x^2} \leq \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{b}.$$

Ovviamente basta verificare il tutto per $x \geq 0$ ed essendo

$$\max_{x \geq 0} \ e^{-x^2} = e^0 = 1,$$

$$\min_{x \geq 0} \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{b} = \frac{3}{b}$$

(raggiunto pure in $x = 0$), deve essere $\frac{3}{b} \geq 1$, cioè $0 < b \leq 3$.

1.10 – Per $b = 0$, $y(x) \equiv 0$ è soluzione su $(0, +\infty)$.
Sia $b \neq 0$. L'equazione è del tipo di Bernoulli e la soluzione è

$$y(x) = \frac{1}{x\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{4} + \frac{x^4}{4}\right)}.$$

Perché sia definita su $(0, +\infty)$ il denominatore non si deve annullare, deve quindi essere $0 < b \leq 4$.
Per essere definita almeno su $(0, 2)$ gli zeri del denominatore devono essere fuori da tale intervallo, da cui $1 - \frac{4}{b} \geq 16$ o $1 - \frac{4}{b} \leq 0$, cioè $-\frac{4}{15} \leq b \leq 4$.

1.11 – Basta sostituire a $y$ l'espressione $\varphi(x) + u(x)$ e tener conto che $\varphi$ è una soluzione di (1).

**1.12 –** $y = x$ è soluzione dell'equazione. Essendo l'equazione del tipo di Riccati, per XII.1.11 poniamo $z = y - x$ da cui si ottiene

$$(1 + x^2)z' + xz + z^2 = 0.$$

Facendo ora l'ulteriore sostituzione $u = -\frac{1}{z}$ (escludiamo la soluzione $z = 0$ corrispondente alla $y = x$), otteniamo l'equazione lineare

$$u' - \frac{x}{1 + x^2}u = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

L'integrale generale di quest'ultima è

$$u(x) = c\sqrt{1 + x^2} - x.$$

L'equazione di partenza ammette quindi il seguente integrale generale

$$y(x) = x - \frac{1}{c\sqrt{1 + x^2} - x}.$$

Si noti che l'integrale particolare $y = x$ non è rappresentato nella formula ottenuta, va quindi considerato separatamente.

**1.13 –** L'equazione è del tipo di Riccati.
L'equazione lineare, cui si giunge ponendo $u = \frac{1}{y + 1}$, è $u' - u = x$, da cui

$$u(x) = ce^x - x - 1$$

e

$$y(x) = \frac{1}{ce^x - x - 1} - 1.$$

Ogni soluzione (oltre alla $y(x) = -1$) è definita o in un intorno di $+\infty$, o in un intorno di $-\infty$ o su tutto $\mathbb{R}$.
In ogni caso $y = -1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \pm\infty$ rispettivamente.
$y = -1$ è definita su tutto $\mathbb{R}$; per le altre deve essere $ce^x - x - 1 \neq 0$ su $\mathbb{R}$, cioè $c \neq (x + 1)e^{-x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui $c > 1$.



**1.14 –** L'equazione è sia di tipo omogeneo che del tipo Riccati. È immediato verificare che $y = x$ è un integrale particolare.
Con le solite sostituzioni, si ottengono le altre soluzioni della forma

$$y(x) = x + \frac{3x}{3cx^3 - 1}.$$

Sono definite almeno su $(2, +\infty)$ se e solo se $c \leq 0$ o $c \geq \frac{1}{24}$.

**1.15 –** Sostituendo $y = e^{-x}$ nell'equazione, si ha che essa è verificata solo per $a(x) = -e^x$.
Sostituendo nell'equazione la funzione $a(x)$ trovata, abbiamo un'equazione di Riccati di cui $y = e^{-x}$ è un integrale particolare.
Con le usuali sostituzioni (vedi XII.1.11) otteniamo, oltre all'integrale particolare $y = e^{-x}$, i seguenti integrali

$$y(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{2}{2ce^{2x} - 1}\right).$$

$y = e^{-x}$ è definita su $[0, +\infty)$; per le altre deve essere $c \neq \frac{1}{2}e^{-2x}$, $x \in [0, +\infty)$, da cui $c \leq 0$ o $c > \frac{1}{2}$.

**1.16 –** Sia $\varphi$ una soluzione di $(E)$ a valori in $J$, allora

$$\frac{1}{q(\varphi(x))}\varphi'(x) = p(x).$$

Operando con la regola di integrazione per sostituzione segue l'asserto.
Viceversa se $\varphi$ verifica la relazione $(*)$, derivando si ottiene che $\varphi$ è soluzione della equazione $(E)$.

**1.17 –** L'equazione si può integrare indifferentemente come equazione lineare o a variabili separabili (XII.1.16).
$y = 1$ è soluzione e per $y \neq 1$ le soluzioni si ottengono dall'eguaglianza

$$\int \frac{dy}{y - 1} = \int \frac{2}{x(x^2 + 2x + 2)}dx + c,$$

cioè

$$\ln|y-1| = \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}} - \arctan(x+1) + c,$$

da cui

$$y(x) = 1 + d\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}e^{-\arctan(x+1)}, \qquad d \in \mathbb{R}.$$

Il problema di Cauchy ha quindi la seguente soluzione

$$y(x) = 1 + \sqrt{5}(b-1)\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}e^{-\arctan(x+1)+\arctan 2}.$$

Se $b > 1$ risulta $y' > 0$, cioè la soluzione è crescente. Il codominio è quindi dato dall'intervallo

$$\left(1, \lim_{x\to+\infty} y(x)\right) = \left(1, 1 + \sqrt{5}(b-1)e^{-\frac{\pi}{2}+\arctan 2}\right).$$

Se $b < 1$ è $y' < 0$ e il codominio è

$$\left(1 + \sqrt{5}(b-1)e^{-\frac{\pi}{2}+\arctan 2}, 1\right).$$

Se $b = 1$ abbiamo la soluzione $y(x) = 1$.

**1.18** – Effettuare in $(E)$ la sostituzione indicata.

**1.19** – L'equazione è di tipo omogeneo (si veda XII.1.18).
Posto $\frac{y}{x} = t$, il problema di Cauchy diviene

$$\begin{cases} xt' = \frac{1}{2}(1+t)^{\alpha} \\ t(1) = 0 \end{cases}, t > -1.$$

Integrando come equazione a variabili separabili otteniamo

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1+t)^{\alpha-1}} = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{1-\alpha}, \qquad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\ln(1+t) = \frac{1}{2}\ln x, \qquad \text{se } \alpha = -1.$$

Se $\alpha = -1$, la soluzione in forma esplicita è

$$y_{-1}(x) = x(\sqrt{x} - 1);$$

Se $\alpha \neq -1$, la soluzione è



$$t = \left(1 + \frac{1-\alpha}{2}\ln x\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1$$

e quindi

$$y_\alpha(x) = x\left[\left(1 + \frac{1-\alpha}{2}\ln x\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1\right].$$

$$y_\alpha(-\alpha) = -\alpha\left[\left(1 + \frac{1-\alpha}{2}\ln(-\alpha)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1\right] \to +\infty$$

per $\alpha \to -\infty$.

∘ **1.20** – Se $ab_1 - a_1 b \neq 0$ sia $(\alpha, \beta)$ l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ a_1 x + b_1 y = -c_1 \end{cases},$$

posto $x = X + \alpha, y = Y + \beta$ e sostituendo otteniamo

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a_1 X + b_1 Y}\right),$$

la quale è del tipo omogeneo.
Sia ora $ab_1 - a_1 b = 0$.
Se $b_1 = 0$, avremo $b = 0$ oppure $a_1 = 0$; nel primo caso l'equazione diviene

$$y' = f\left(\frac{ax + c}{a_1 x + c_1}\right) = \psi(x);$$

nel secondo caso è $c_1 \neq 0$ (e $b \neq 0$), quindi

$$f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right) = f\left(\frac{a}{c_1}x + \frac{b}{c_1}y + \frac{c}{c_1}\right),$$

posto $u = \frac{a}{c_1}x + \frac{b}{c_1}y$ si ha l'equazione a variabili separabili

$$\frac{du}{dx} = \frac{a}{c_1} + \frac{b}{c_1}f\left(u + \frac{c}{c_1}\right).$$

Se $b_1 \neq 0$, o avremo $a_1 = 0$ e quindi $a = 0$ e si ottiene

$$y' = f\left(\frac{by+c}{b_1 y + c_1}\right) = \varphi(y),$$

oppure avremo $a_1 \neq 0$, quindi posto

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{1}{k},$$
$$a_1 x + b_1 y = k(ax+by),$$

posto $u = ax + by$ otteniamo

$$\frac{du}{dx} = a + bf\left(\frac{u+c}{ku+c_1}\right),$$

equazione à variabili separabili.

∘ **1.21** – Posto $y' = t(x)$, l'equazione diventa

$$y = xt + g(t),$$

da cui derivando

$$t = t + xt' + g'(t)t'$$

e quindi

$$t'(x + g'(t)) = 0.$$

Abbiamo quindi le soluzioni $t = c$, cioè

$$y(x) = cx + g(c), \qquad c \in \mathbb{R},$$
$$\begin{cases} x = -g'(t) \\ y = -tg'(t) + g(t) \end{cases}, \qquad t \in I.$$

In particolare per l'equazione proposta otteniamo

$$y(x) = cx + c^2 + c^3, \qquad c \in \mathbb{R}$$

e

$$\begin{cases} x = -t(2+3t) \\ y = -t^2(1+2t) \end{cases}.$$



∘ **1.22** – Sostituendo $y' = p(x)$ nell'equazione e derivando rispetto ad $x$, otteniamo la relazione

(1) $\qquad p'\,[xf'(p) + g'(p)] + [f(p) - p] = 0.$

Se $\overline{p} \in I$ è tale che $f(\overline{p}) = \overline{p}$, allora la funzione costante $\overline{p}$ è soluzione e porta a

$$y(x) = xf(\overline{p}) + g(\overline{p}) = x\overline{p} + g(\overline{p}).$$

Sia $J$ un sottointervallo di $I$ ove $f(p) \neq p$. Se $p(x)$ è una soluzione di (1) a valori in $J$ definita in un certo intervallo $U$, il coefficiente di $p'$ in (1) è sempre diverso da 0 in $U$.
(Se $\overline{x}f'(p(\overline{x})) + g'(p(\overline{x})) = 0$, dovrebbe essere anche $f(p(\overline{x})) - p(\overline{x}) = 0$, ciò che abbiamo escluso) e quindi $p'$ ha segno costante in $U$. Allora $p$ è invertibile su $U$ e la sua funzione inversa $x(p)$ soddisfa l'equazione differenziale lineare

(2) $\qquad x'(p) = \dfrac{xf'(p) + g'(p)}{p - f(p)}.$

Detta $\varphi(p,c)$ una soluzione di (2), le soluzioni dell'equazione originaria in forma parametrica saranno le seguenti

$$\begin{cases} x = \varphi(p,c) \\ y = \varphi(p,c)f(p) + g(p) \end{cases}, \qquad p \in J.$$

Nel caso particolare richiesto le soluzioni sono date da $y = 0, y = x + 1$ e

$$\begin{cases} x = \dfrac{3p^2 - 2p^3 + 2c}{2(1-p)^2} \\ y = \dfrac{(3p^2 - 2p^3 + 2c)p^2}{2(1-p)^2} + p^3 \end{cases}.$$

**1.23** – Se $y' = t$, è $x = te^t$.

$$t = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{e^t(1+t)},$$

da cui

$$y = (t^2 - t + 1)e^t + c \qquad \text{e} \qquad x = te^t.$$

Osservazione: il procedimento vale in generale per equazioni della forma $x = f(y')$.

**1.24** – La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = ke^{\frac{c}{2}x}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

La condizione $y(0) = 1$ implica $k = 1$, cioè $y(x) = e^{\frac{c}{2}x}$.

$$\int_0^1 e^{\frac{c}{2}x}dx = \frac{2}{c}\left[e^{\frac{c}{2}} - 1\right] = 1$$

è impossibile se $c \neq 0$, se $c = 0$, $\int_0^1 dx = 1$.
Il valore $c$ cercato è quindi 0 e la soluzione è $y(x) = 1$.

**1.25** – $y'' = 2x\left[\sin(y^2) + 1\right] + x^2\left[2y'\cos(y^2)\right]$
$y''' = 2\left[\sin(y^2) + 1\right] + 8xy'\cos(y^2) +$
$\quad + 2x^2y''\cos(y^2) - 4x^2y'^2\sin(y^2)$,
da cui

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$
$$y''(0) = 0, \qquad y'''(0) = 2.$$

Il polinomio $P_3(x)$ cercato è $P_3(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

**1.26** – Le soluzioni dell'equazione sono soluzioni anche di una delle due seguenti equazioni

$$y' = \pm 3\sqrt{1 - y^2}.$$

$y = 1$ e $y = -1$ sono soluzioni e abbiamo la limitazione $|y| \leq 1$.
Integrando le due equzioni a variabili separabili otteniamo

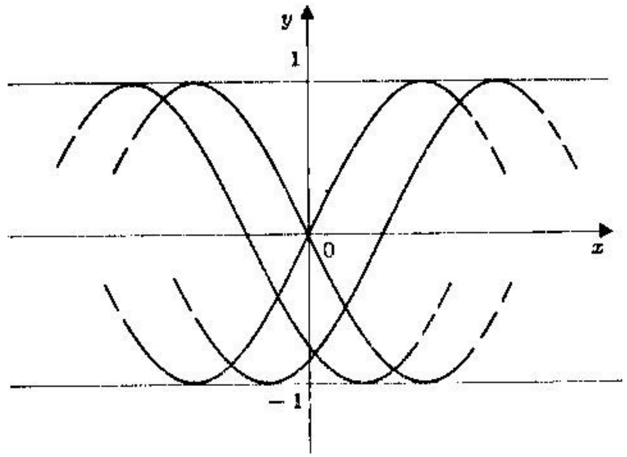


$$\arcsin y = \pm 3x + c.$$

Fissato $c$, le due soluzioni sono definite rispettivamente in $-\frac{\pi}{6} - \frac{c}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} - \frac{c}{3}$ e $-\frac{\pi}{6} + \frac{c}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \frac{c}{3}$ e su questi intervalli hanno la espressione

$$y = \sin(\pm 3x + c).$$

Poiché agli estremi del relativo intervallo di definizione tali soluzioni valgono $+1$ o $-1$ e hanno derivata nulla, si raccordano di classe $C^1$ con le soluzioni costanti trovate ed anche eventualmente fra di loro.




**1.27** – Le funzioni $f$ cercate devono soddisfare le seguenti condizioni

$$(1) \quad \frac{f^3(x)}{x} = \int_a^x f(t)dt, \quad f(a) = 0.$$

La continuità di $f$ permette di differenziare i due membri della (1), portando al seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3xy^2y' - y^3 = x^2y \\ \quad y(a) = 0 \end{cases} \qquad (0 < a < x)$$

$y \equiv 0$ è soluzione del problema.
Risolvendo l'equazione (di Bernoulli) si ottengono le due soluzioni (sempre diverse da 0 per $x > a$)

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{4}{3}})}\quad .$$

1.28 – Posto $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, è $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$; sostituendo nell'equazione otteniamo

$$(a_0 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} [n a_{n-1} + (2n+1)a_n] = 0,$$

da cui $a_0 = 1$, $a_n = -\frac{n}{2n+1}a_{n-1}$.
Applicando il criterio del rapporto si ha che il raggio di convergenza della serie è di 2.
Si vede facilmente che è

$$a_n = (-1)^n \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

## § 2 – Equazioni differenziali di ordine superiore.

2.1 – Mediante la sostituzione indicata, per $k \leq n$ la derivata $k$-esima di $y$ si esprime come funzione di $t, t', \ldots, t^{(k-1)}$ (le derivate di $t$ sono rispetto ad $y$). L'equazione quindi viene ad avere una forma del tipo

$$G(y, t, t', \ldots, t^{(n-1)}) = 0$$

dove $t$ è la funzione incognita e $y$ è la variabile indipendente.
Applichiamo il procedimento all'equazione

$$y'' = y^{-\frac{1}{2}}.$$



Otteniamo $tt' = y^{-\frac{1}{2}}$, equazione a variabili separabili, le cui soluzioni sono

$$t = \pm(4\sqrt{y} + c)^{\frac{1}{2}},$$

cioè

$$y' = \pm(4\sqrt{y} + c)^{\frac{1}{2}}.$$

Allora

$$\pm\int \frac{dy}{(4\sqrt{y} + c)^{\frac{1}{2}}} = x + d,$$

cioè

$$x = d \pm \frac{1}{6}(4\sqrt{y} + c)^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{y} - c).$$

2.2 – Se $y$ è periodica di periodo $2\pi$, lo sono anche $y'$ e $y''$, quindi deve esserlo anche $\beta e^x$, ma ciò implica $\beta = 0$.
In tal caso le soluzioni dell'equazione hanno la forma

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}x}.$$

Se escludiamo le soluzioni costanti che si hanno per $\alpha = 0$, oppure per $\alpha$ qualsiasi e $c_1 = c_1 = 0$, dovrà essere $\sqrt{-\alpha}$ puramente immaginario, cioè $\alpha = -k^2$, $k \in \mathbb{R}$, per avere delle periodicità; in tal caso le soluzioni sono

$$y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx.$$

Affinchè il periodo sia $2\pi$ (o un suo sottomultiplo) deve essere $k$ intero, cioè $\alpha = -n^2, n \in \mathbb{N}$.

2.3 – Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea è $r^2 - 4r + 5$, le cui radici sono $2 \pm i$. L'integrale generale della equazione omogenea è $y_0(x) = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x$.
Cerchiamo ora un integrale particolare dell'equazione non omogenea, della forma $a \sin x + b \cos x$. Con una semplice sostituzione ricaviamo che devono essere $a = 1$, $b = 2$.

L'integrale generale dell'equazione data è

$y(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x + \sin x + 2\cos x$.
Imponendo le condizioni indicate otteniamo $c_1 = -2, c_2 = 4$; la soluzione del problema di Cauchy è

$y(x) = -2e^{2x} \cos x + 4e^{2x} \sin x + \sin x + 2\cos x$.

**2.4** – Sostituendo $y = x^a$ nell'equazione, otteniamo

$$\left(a^2 - \frac{7}{2}a + 3\right) x^a = 0,$$

quindi $a$ deve essere radice di $a^2 - \frac{7}{2}a + 3$, cioè $a = 2$ e $a = \frac{3}{2}$. Poiché le due funzioni $y = x^2$ e $y = x^{\frac{3}{2}}$ sono indipendenti su $(0, +\infty)$, l'integrale generale dell'equazione (lineare) omogenea è

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{\frac{3}{2}}.$$

**2.5** – $y'(x) = \varphi'(x)z(x) + \varphi(x)z'(x)$

$y''(x) = \varphi''(x)z(x) + 2\varphi'(x)z'(x) + \varphi(x)z''(x)$,

sostituendo otteniamo

$[P(x)\varphi(x)]z'' + [2P(x)\varphi'(x) + Q(x)\varphi(x)]z' +$

$+[P(x)\varphi''(x) + Q(x)\varphi'(x) + R(x)\varphi(x)]z = S(x)$,

ma l'ultimo termine a primo membro è nullo essendo $\varphi$ soluzione dell'equazione omogenea, da cui l'asserto.
Si osservi che l'equazione ottenuta è integrabile come equazione del primo ordine in $z'$. Quindi si può ricavare $z(x)$ e $y(x)$.

**2.6** – Sostituendo $e^{mx}$ nell'equazione omogenea si vede che deve essere $m = 1$.
Facendo la sostituzione $y(x) = e^x z(x)$ in $(E)$, otteniamo

$$z'' - \frac{2}{x}z' = x^2 e^{2x}$$



da cui

$$z'(x) = c_1 x^2 + x^2 e^x$$

e quindi

$$z(x) = c_1 \frac{x^3}{3} + e^x(x^2 - 2x + 2) + c_2.$$

L'integrale generale della $(E)$ è allora

$$y(x) = c_1 \frac{x^3}{3} e^x + c_2 e^x + e^{2x}(x^2 - 2x + 2).$$

**2.7** – Ponendo $y(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}\, z(x)$ e sostituendo in $(E)$ si ottiene l'equazione

$$z'' + \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{1+x^2} z' = 0$$

da cui

$$z'(x) = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})},$$
$$z(x) = -\frac{c}{x + \sqrt{1+x^2}} + d$$

e

$$y(x) = -\frac{c}{\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} + d\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}.$$

∘∘ **2.8** – Se le funzioni $v_i$ soddisfano le seguenti relazioni

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i' = \sum_{i=1}^{n} u_i' v_i' = \ldots = \sum_{i=1}^{n} u_i^{(n-2)} v_i' = 0,$$

allora

$$\overline{y}' = \sum_{i=1}^{n} u_i' v_i, \qquad \overline{y}'' = \sum_{i=1}^{n} u_i'' v_i, \ldots$$

$$\overline{y}^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} u_i^{(n-1)} v_i,$$

$$\overline{y}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} u_i^{(n)} v_i + \sum_{i=1}^{n} u_i^{(u-1)} v_i'.$$

Sotto le condizioni precedenti, affinché $\overline{y}$ sia soluzione di $(E)$ deve essere $\sum_{i=1}^{n} u_i^{(n-1)} v_i' = Q(x)$, infatti sostituendo in $(E)$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \{u_i^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} P_k u_i^{(n-k)}\} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} u_i^{(n-1)} v_i' = Q(x),$$

poiché le $u_i$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, il primo membro si riduce all'ultima sommatoria.
In definitiva le funzioni $v_i$ devono soddisfare il sistema

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{(k)} v_i' = 0, \qquad k = 0, \ldots, n-2$$
$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{(n-1)} v_i' = Q(x).$$

Questo sistema è sempre risolubile grazie all'indipendenza delle funzioni $u_i$.

2.9 – Tre soluzioni indipendenti sono $y = e^x, y = e^{2x}, y = xe^{2x}$. Applicando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie (XII.2.8) si ottiene il sistema.

$$\begin{cases} v_1' e^x + e^{2x} v_2' + x e^{2x} v_3' = 0 \\ v_1' e^x + 2e^{2x} v_2' + (1+2x) e^{2x} v_3' = 0 \\ v_1' e^x + 4e^{2x} v_2' + 4(1+x) e^{2x} v_3' = \cos x \end{cases}$$

Da cui $v_1' = e^x \cos x$; $v_2' = -(1+x)\cos x$; $v_3' = \cos x$, e quindi $v_1 = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$; $v_2 = -(\cos x + (1+x)\sin x)$ $v_3 = \sin x$.



L'integrale generale è dunque:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x} + \frac{e^{2x}}{2}(\cos x + \sin x) -$$
$$- e^{2x}\{(1+x)\sin x + \cos x\} + x \sin x e^{2x}.$$

2.10 – L'equazione data è lineare del primo ordine nella funzione incognita $y'$. Per XII.1.1 gli integrali generali per $x > 0$ e $x < 0$ sono

$$y_1(x) = c_1 \ln x + \frac{x^3}{9} + c_2, \qquad x > 0;$$

$$y_2(x) = d_1 x^2 + \frac{x^3}{3} + d_2, \qquad x < 0.$$

Una soluzione di classe $C^2(\mathbb{R})$ si può ottenere solo mediante raccordo di classe $C^2$ in $x = 0$ di due soluzioni delle due famiglie indicate. Il limite per $x \to 0^+$ di $y_1$ esiste finito solo se $c_1 = 0$ ed in tal caso è $\lim_{x \to 0^+} y_1(x) = c_2$.
Tenendo conto della condizione $c_1 = 0$, è $\lim_{x \to 0^+} y_1'(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} y_1''(x) = 0$.
Abbiamo poi $\lim_{x \to 0^-} y_2(x) = d_2$, $\lim_{x \to 0^-} y_2'((x) = 0$ e $\lim_{x \to 0^-} y_2''(2) = 2d_1$.
Il raccordo può quindi avvenire solo se $c_2 = d_2$ e $d_1 = 0$, in conclusione le soluzioni $C^2(\mathbb{R})$ sono

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + k, & x < 0 \\ \frac{x^3}{9} + k, & x \geq 0. \end{cases}$$

Imponendo su queste soluzioni le condizioni proposte otteniamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} + k = \alpha \\ \frac{1}{9} + k = \beta \end{cases}$$

da cui $k = \alpha + \frac{1}{3} = \beta - \frac{1}{9}$ il legame fra $\alpha$ e $\beta$ è quindi $\alpha - \beta = -\frac{4}{9}$.

**2.11** – $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ e
$\sin x = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{dispari}}} (-)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!}$.
Le condizioni iniziali danno $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.
Sostituendo nell'equazione, per $n > 1$ otteniamo le seguenti relazioni

$$a_{n-2} - 3na_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = \\ = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

dalle quali si deduce immediatamente che per $n$ pari è $a_n = 0$.

∘ **2.12** – Derivando $(E_1)$ si ottiene

$$(y'-1)f(y') + (y-x)f'(y')y'' = 0,$$

per la $(E)$ $(y-x)y'' = -(1+y')(1+y'^2)$, da cui

$$(y'-1)f(y') - (1+y')(1+y'^2)f'(y') = 0.$$

Questa equazione è lineare del I ordine nell'incognita $f$ come funzione di $y'$.
Integrando otteniamo

$$f(y') = c\frac{\sqrt{y'^2+1}}{y'+1}, \qquad c \neq 0.$$

L'equazione $(E_1)$ diviene

(1) $$c(y-x)\frac{\sqrt{y'^2+1}}{y'+1} = a,$$

essendo $a$ arbitrario e $c \neq 0$ arbitrario, scegliamo $c = 1$. Da (1) otteniamo quindi l'equazione

$$y = x + a\frac{y'+1}{\sqrt{y'^2+1}}$$



del tipo di Lagrange (XII.1.22).
Le soluzioni sono allora

$$y = x + a\sqrt{2}$$

e

$$\begin{cases} x = \frac{-ap}{\sqrt{p^2+1}} + k \\ y = \frac{a}{\sqrt{p^2+1}} + k. \end{cases}$$

**2.13** – Derivando entrambi i membri (rispetto ad $x$) nella relazione $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ otteniamo $2(x-a) + 2yy' = 0$ da cui eliminando il parametro $a$ si ottiene l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Più in generale, ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte di due variabili, l'equazione differenziale che ammette come soluzione la famiglia di curve $F(x,y,a) = 0$ si ottiene eliminando il parametro $a$ dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0 \\ F(x,y,a) = 0 \end{cases}$$

**2.14** – Se la retta dei centri dei cerchi è l'asse $x$, la famiglia di circonferenze ha equazione $(x-a)^2 + y^2 = R^2$. Questa famiglia è soluzione della equazione differenziale

$$y' = \pm\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{y}.$$

Le traiettorie ortogonali soddisfano quindi l'equazione differenziale seguente $y' = \mp\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}$ che ha quali soluzioni le curve $\pm(x-A) = \sqrt{R^2-y^2} - R\ln\frac{R+\sqrt{R^2-y^2}}{|y|}$.

# APPENDICE

# LA SUCCESSIONE CRESCENTE DEGLI INTERI PRIMI ED ALTRE COLLEGATE CON QUESTA

In questa sezione prenderemo in esame la successione

$$\{p_n\} = p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$$

degli interi assoluti primi e alcune altre successioni con questa collegate; dimostreremo alcune semplici proprietà ed altre, che, sebbene semplici, richiedono dimostrazioni difficili, ci limiteremo ad enunciarle con qualche commento a scopo informativo.

È ben noto che la successione $\mathbb{N}$ degli interi assoluti è ripartita nelle quattro categorie seguenti:

il numero zero: 0;

il numero: 1;

i numeri primi: 2, 3, 5, 7, 11, 13,...,

i numeri composti: 4, 6, 8, 9, 10, ....

Ogni numero composto ammette una ed una sola rappresentazione canonica come prodotto di fattori primi. Se i divisori primi distinti di $n$ sono $q_1, q_2, \ldots, q_s$ (ordiniamo $q_1 < q_2 < \ldots < q_s$) e $q_h^{r_h}$ la massima potenza di $q_h$ che divide $n$ si scrive

$$n = \prod_{q|n} q^r \text{ oppure } n = q_1^{r_1} q_2^{r_2} \ldots q_s^{r_s}, \ (q_i \neq q_j).$$

La convenzione abituale di considerare il "prodotto" di un solo fattore uguale al numero stesso e il "prodotto" vuoto di fattori uguale al numero 1 consente di attribuire la rappresentazione canonica anche ad ogni potenza di un numero primo, a ogni numero primo ed anche al numero 1. Rimane escluso lo zero. Pertanto: ogni intero $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ammette una e una sola rappresentazione canonica.

Sia $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$: cioè se $p_n \leq x < p_{n+1}$ risulta $\pi(x) = \pi(p_n) = n$ funzione enumeratrice di $\{p_n\}$.

È ben noto che:

1°) se $p$ è primo e $p|ab$ allora $p|a$ oppure $p|b$.

2°) Se $p|a$ e $p|b$ allora $p|a \pm b$.

3°) Se $n = \prod q^r$ è la rappresentazione canonica di $n$ allora *tutti e soli* gli interi naturali primi divisori di $n$ sono $q_1, q_2, \dots q_s$.

4°) Se $n \geq 2$, il suo minimo divisore maggiore di 1 è un intero primo.

Veniamo a stabilire il seguente

*Teorema* (Euclide) Esistono infiniti numeri naturali primi. Questo equivale a dire $\pi(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

*Dim.* Procediamo per assurdo. Siano $p_1, p_2, \dots, p_k$ gli interi primi, in numero finito, disposti in ordine crescente. L'intero $Q_k = p_1 p_2 \dots p_k + 1$ non è divisibile per alcuno degli interi $p_1, p_2, \dots, p_k$ ed il suo minimo divisore, diciamolo $p'$, è primo e non appartiene alla classe finita dei $k$ interi primi: ne segue $p_k < p'$ e ne deriva l'assurdo.

La distribuzione di $\{p_n\}$ è molto irregolare.

*Teorema* Fissato $H (\in \mathbb{N} - \{0\})$ esistono infinite classi di $H$ interi consecutivi ciascuno dei quali è composto.

Poiché la successione degli interi naturali composti è interrotta solo nei posti occupati dagli interi primi, il teorema enunciato equivale al seguente

$$\limsup_{n \to +\infty} (p_{n+1} - p_n) = +\infty.$$

Possiamo precisare il precedente teorema nel modo seguente:

*Teorema* Denotiamo con $P_k$ il prodotto dei primi $k$ interi primi $P_k = p_1 p_2 \dots p_k$; allora ciascun intero della sequenza $\{P_k + m : m = 2, 3, 4, \dots, p_k\}$ è composto.

*Dim.* Infatti, detto $p_s$ il minimo divisore, maggiore di 1, dell'intero $m$ si verificano le circostanze seguenti

$$p_s \text{ è primo}, \quad 1 \leq s \leq k, \quad p_s | m, \quad p_s \leq m < P_k + 2, \quad p_s | P_k$$

e quindi $p_s | P_k + m$ e questo intero risulta composto. Poiché $p_k \to +\infty$ per $k \to +\infty$ ne segue anche l'affermazione nella forma precedente (basta assumere $k$ in guisa da avere $P_k > H$).

*Teorema* Nella progressione aritmetica $(a, d \in \mathbb{Z})$ $\{a + ud : a \geq 0, d \gtrless 0,$



$u = 0, 1, 2, \dots\}$ esistono infiniti elementi che ammettono (naturalmente con esponenti diversi!) gli stessi divisori primi (Polya).

*Dim.* Per $a = 0$ l'affermazione è evidente. Sia $a > 0$: si può supporre, senza limitare la generalità, $d \geq 1, (a, d) = 1, a > d$ [(°)]. Poiché $a^{\varphi(d)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ d) (\varphi(d)$ indicatore di Eulero–Gauss, si veda VI.1.27), per ogni $v = 1, 2, 3, \dots$ il numero razionale

$$n = a(a^{\varphi(d)v} - 1)/d$$

è intero e quindi si ricava che l'elemento della progressione $a + nd = a^{1+v\varphi(d)}$ (con l'opportuna scelta di $n$, in dipendenza da $v$) è potenza di $a$. Si è costruita una sottosuccessione di potenze di $a$.

*Teorema* Nessun polinomio $f(n)$, a coefficienti interi e non costante, può assumere per ogni $n \geq 0$ un valore intero primo: e neppure per tutti i valori di $n$ abbastanza grandi.

*Dim.* Sia $f(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$, $(k \geq 1; a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z})$.
Si può supporre $a_0 \geq 1$ (cambiando eventualmente in segno a $f(n)$) e quindi $f(n) \to +\infty$ per $n \to +\infty$.
Se fosse $(a_0, a_1, \dots a_k) = d > 1$, allora ogni $f(n)$ è divisibile per $d$ e per $n \geq n_0$ risulta $f(n) > d$ e quindi composto. Esaminiamo il caso

$$(a_0, a_1, \dots, a_k) = 1.$$

Sia, per ogni $x \geq x_0$, $f(x) > 1$ e poniamo $y_0 = f(x_0) > 1$, allora

$$f(ry_0 + x) = a_0(ry_0 + x)^k + a_1(ry_0 + x)^{k-1} + \dots$$

Tenendo conto dello sviluppo $(ry_0 + x)^h = (ry_0)^h + \dots + x^h (0 \leq h \leq k)$ che è della forma $b_0(ry_0) + x^h$ si vede che, come lo è $f(x_0) = y_0$, anche $f(ry_0 + x_0)$ è divisibile per $y_0$. D'altronde $f(ry_0 + x_0) \to +\infty$ per $r \to +\infty$ e pertanto esistono infiniti numeri composti della forma $f(n)$.

Una valutazione dal disotto per $\pi(x)$ e una maggiorazione per $p_n$, *ambedue molto grossolane*, sono fornite dal seguente

(°) In questa sezione indicheremo con $(a, b, c, \dots)$ il massimo comun divisore di $a, b, c, \dots$.

*Teorema* a) $\pi(x) \geq \ln x/(2\ln 2), \quad (x \geq 1);$
b) $p_n \leq 4^n, \quad (n \geq 1).$

*Dim.* Si consideri la classe $J_k$ degli interi $n$ non divisibili per alcun numero primo $p_t (t > k)$ e poniamo $n = n_0^2 m$ essendo $m$ non divisibile per alcun quadrato $> 1$:

$$n = n_0^2 m, \quad m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}, \quad (0 \leq b_s \leq 1, s = 1, 2, \dots, k).$$

Denotiamo con $A(k, x)$ il numero degli elementi di $J_k$ non superiori a $x$. Per l'intero $m$ la scelta della sequenza degli esponenti $b_1, b_2, \dots, b_k$ può essere effettuata in $2^k$ modi diversi e pertanto il numero degli interi $m$ è $2^k$ e si ricava $A(k, x) \geq 2^k$.
D'altronde, poiché $n_0^2 \leq n$, si ricava $n_0 \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{x}$ e il numero degli interi $n_0$ non supera $\sqrt{x}$. Ne segue $A(k, x) \leq 2^k \sqrt{x}$.
Si prende l'occasione per dimostrare qui ancora $\pi(x) \to +\infty$.
Se il numero degli interi primi fosse finito, diciamolo $k$, allora, poiché ogni intero sarebbe un $n$ risulterebbe

$$A(k, x) = [x], \quad [x] \leq 2^k \sqrt{x}, \quad [x^2] \leq 2^{2k} x,$$
$$(x - 1)^2 \leq 2^{2k} x, \quad x \leq 2^{2k} + 2,$$

che, essendo $k$ fisso, è assurdo per $x$ abbastanza grande.
a) Assumiamo $k = \pi(x)$; allora $p_{k+1} > x$ ed è $x = A(k, x) \leq 2^{\pi(x)} \sqrt{x}$, $2^{\pi(x)} \geq \sqrt{x}$ e passando ai logaritmi segue a).
b) Assumiamo ancora $\pi(x) = k, x = p_k, p_k \leq 2^{2k}$ e vale b).

È molto interessante il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n$ e dei prodotti

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/p_n), \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/p_n).$$

*Teorema* Dimostrare le tre proposizioni seguenti (a), (b), (c) mostrando preventivamente la loro mutua equivalenza.
(a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n$ diverge a $+\infty$. (Eulero)
(b) Il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/p_n)$ diverge a $+\infty$.



(c) Il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/p_n)$ diverge a 0.

*Dim.* Per l'equivalenza di (a), (b), (c) vedi IV.3.26.
Dimostrazione di (c). Consideriamo l'inverso del prodotto infinito ed il relativo prodotto parziale

$$\prod_{k=1}^{N} \left( \frac{1}{1 - 1/p_k} \right) = \prod_{k=1}^{N} \left( 1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots \right) = \sum_{(*)} \frac{1}{n}$$

(*) essendo questa somma estesa a tutti gli interi $n$ i cui divisori primi non superano $p_N$. D'altronde

$$\sum_{(*)} \frac{1}{n} \geq \sum_{n \leq p_N} \frac{1}{n} > \ln p_N - A \to +\infty, \text{per } N \to +\infty.$$

Si conclude:

$$\prod_{n=1}^{N} \left( \frac{1}{1 - 1/p_n} \right) \to +\infty \text{ per } N \to +\infty,$$

da cui l'asserto.

*Teorema* La serie e i due prodotti infiniti

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n^2, \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/p_n^2). \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/p_n^2)$$

sono tutti convergenti (e, naturalmente, l'ultimo ad un valore non nullo).

*Dim.* Si procede tenendo presenti le considerazioni del teorema precedente. Essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^2}$ una sottoserie di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ risulta essere convergente (IV.3.10).

Siano $q_1, q_2, \dots q_k$ interi primi distinti, scelti nella successione $\{p_n\}$. Allora, la successione degli interi naturali $m$ che non sono divisibili per alcuno di questi $k$ interi primi ammette densità $D_k$ ed è

$$D_k = (1 - 1/q_1)(1 - 1/q_2) \dots (1 - 1/q_k).$$

*Dim.* Poniamo $Q_k = q_1 q_2 \dots q_k$. Gli interi positivi $m$ non superiori a $Q_k$ sono in numero $Q_k(1-1/q_1)\dots(1-1/q_k)$. Infatti se dalla classe $1, 2, 3, \dots, Q_k$ togliamo quelli divisibili per $q_1$, che sono $q_1, 2q_1, .., (Q_k/q_1)\cdot q_1$ ne rimangono $Q_k - Q_k/q_1 = Q_k(1-1/q_1)$. Se adesso togliamo anche quelli divisibili per $q_2$ (che sono $q_2, 2q_2, \dots (Q_k/q_2)q_2$) tenendo conto che è necessario computare quelli che sono già stati tolti (divisibili anche per $q_1$) il numero di quelli che rimangono è

$$Q_k - Q_k/q_1 - Q_k/q_2 + Q_k/(q_1 q_2) = Q_k(1-1/q_1)(1-1/q_2).$$

Continuando il ragionamento, il numero degli interi $m \le Q_k$ risulta

$$Q_k(1-1/q_1)(1-1/q_2)\dots(1-1/q_k).$$

D'altronde, ogni intero del tipo $rQ_k + t(0 < t \le Q_k)$ è un intero $m$ se e soltanto se $t$ è un intero $m$. Si calcola quindi il numero $A(x)$ degli interi $m$ non superiori ad $x$.

$$A(x) = \left(\left[\frac{x}{Q_k}\right] + \psi\right)\cdot Q_k(1-1/q_1)\dots(1-1/q_k)\ (0 \le \psi \le 1)$$

da cui (riflettendo sul numero delle presenze degli interi $m$ nell'ultima frazione di tratto, che non può superare $Q_k(1-1/q_1)\dots(1-1/q_k)$) risulta

$$(x - Q_k)\prod_{h=1}^{k}(1-1/q_h) \le A(x) \le (x+Q_k)\prod_{h=1}^{k}(1-1/q_h)$$

da cui

$$A(x)/x = (1+\lambda Q_k/x)\prod_{1}^{k}(1-1/q_h) \to \prod_{1}^{k}(1-1/q_h) = D_k \quad (-1 \le \lambda \le 1)$$

da cui l'asserto.

*Teorema* La successione $\{p_n\}$ degli interi primi ha densità nulla: cioè

$$\pi(x)/x \to 0 \text{ per } x \to +\infty.$$



*Dim.* Fissiamo $k \ge 1$ e la sequenza finita $p_1, p_2, \dots, p_k$; scriviamo $P_k = p_1 p_2 \dots p_k$. Per il teorema precedente possiamo maggiorare il numero degli interi primi che non superano $x$. Teniamo conto che nel tratto iniziale sono contenuti anche i $k$ interi primi $p_1, \dots, p_k$. Abbiamo pertanto:

$$\pi(x) \le A(x) + k \le k + x(1 + P_k/x)\prod_{h=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_h}\right)$$

da cui, essendo $k$ fissato, per $x \to +\infty$ risulta

$$\pi(x) \le k + (1+o(1))x\prod_{h=1}^{k}(1-1/p_h).$$

Poiché $\prod_{h=1}^{\infty}(1-1/p_h)$ diverge a zero, ad ogni $\varepsilon > 0$ si può coordinare un intero $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tale che per $k \ge k_0$ si abbia $D_k < \varepsilon$ e quindi

$$\pi(x) \le (1+o(1))x\varepsilon + k$$
$$\pi(x)/x \le (1+o(1))\varepsilon + \frac{k}{x}.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ ne segue l'asserto.

## Altre informazioni sull'andamento di $\pi(x)$

*Proposizione di Betrand*
Per $n > 1$, esiste almeno un numero primo $p$ tale che sia $n < p \le 2n$, cioè per ogni $r$ risulta $p_{r+1} < 2p_r$.
Questa proposizione, ben nota e classica, non viene dimostrata dal Bertrand, ma *verificata* su un'ampia classe di interi naturali; precisamente, Bertrand verificò che esiste un intero primo $p$ che verifica $n < p < 2n - 2$ per ogni $n$ compreso in $3 < n < 3 \cdot 10^6$. Più tardi P. Čebičev dimostrò la proposizione stessa (1850).
Attraverso congetture di Gauss, Legendre ed altri l'orientamento sulla funzione campione con la quale confrontare $\pi(x)$ era $x/\ln x$. Precisamente a P. Čebičev si deve il seguente notevole risultato

$$0 < \liminf_{x\to+\infty} \pi(x)/\frac{x}{\ln x} \le 1 \le \limsup_{x\to+\infty} \pi(x)/\frac{x}{\ln x} < +\infty.$$

Questa catena di disuguaglianze è un modo di esprimere i due teoremi di Čebičev: le due estreme costituiscono il primo teorema e le due centrali il secondo teorema.
Finalmente, Hadamard e De La Vallée Poussin dimostrarono, valendosi dell'apparato delle funzioni analitiche di variabile complessa, che

$$\pi(x) \sim x/\ln x \text{ cioè } p_n \sim n \cdot \ln n.$$

Questa proposizione è nota come "Primzahlsatz" si può ulteriormente precisare in forme sempre più raffinate per quanto riguarda sia la funzione campione che il termine complementare. Ci limiteremo a segnalare la precisazione più rudimentale

$$\pi(x) = x/\ln x + O(\frac{x}{\ln^2 x}) \text{ per } x \to +\infty.$$

Abbiamo veduto che $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n^2$ è convergente: questo porta come conseguenza che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\ln(1 - 1/p_n) + 1/p_n\}$$

è convergente. Infatti $\ln(1-1/p_n)+1/p_n = -1/p_n - 1/(2p_n^2) - \ldots + 1/p_n = O(1/p_n^2)$. Mediante questa serie e la classica costante $C$ di Eulero–Mascheroni (costante universale)

$$C = \lim_{n\to+\infty}\left\{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$$

si può avere la costante universale

$$B = C + \sum_{n=1}^{\infty}\{\ln(1 - 1/p_n) + 1/p_n\}$$

utile, insieme a $C$, a precisare i teoremi di Eulero. La somma parziale della serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n$ ha l'andamento $\sum_{p_n \leq x} 1/p_n = \ln\ln x + B + o(1)$ per $x \to +\infty$, mentre la divergenza a zero del prodotto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - 1/p_n)$ è regolata da



$$\prod_{p_n \leq x}(1 - 1/p_n) \sim e^{-C}/\ln x, \text{ per } x \to +\infty.$$

Ricerche numerose e penetranti, che si servono anche della teoria delle serie del Dirichlet sono state dedicate alla distribuzione dei numeri primi contenuti nelle progressioni aritmetiche nelle quali il primo elemento e la differenza sono primi fra loro, cioè

$$\{an + b : (a,b) = 1, 0 < b < a, n = 1,2,3,\ldots\}.$$

Detto
$\pi(x; a, b)$ il numero degli interi primi minori di $x$ contenuti nella successione $\{an + b\}$, sussistono per esso teoremi analoghi al "Primzahlsatz" e a quelli che lo accompagnano: per esempio, vale la relazione asintotica

$$\pi(x; a, b) \sim x/(\varphi(a) \cdot \ln x), \text{ a fisso e } x \to +\infty,$$

$\varphi(a)$ indicatore di Eulero.
Questa relazione mostra il fatto interessante che i numeri primi si distribuiscono, in un certo senso, equamente fra le $\varphi(a)$ progressioni corrispondenti ai valori $b_1, b_2, \ldots b_{\varphi(a)}$ minori di $a$ e primi con $a$.
Segnaliamo anche la seguente proprietà. Sia

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k$$

"libero da quadrati" (cioè con i $k$ fattori primi distinti) e denotiamo con $\pi_k(x)$ la funzione enumeratrice degli interi (liberi da quadrati) che sono prodotto di $k$ fattori distinti. Denotiamo con $m$

$$m = p_1^{h_1} \ldots p_s^{h_s}, \; (h_1 + h_2 \ldots + h_s = k; h_1 \geq 1, \ldots, h_s \geq 1)$$

gli interi prodotto di $k$ interi primi non necessariamente distinti e con $\mathcal{T}_k(x)$ la funzione enumeratrice della successione degli $m$. Vale il seguente

*Teorema*

$$\pi_k(x) \sim \mathcal{T}_k(x) \sim \frac{x(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!\ln x}, \; (k \geq 2).$$

Questo pone in evidenza il fatto, a prima vista paradossale, che nella rappresentazione asintotica di $\pi_k(x)$ e di $\mathcal{T}_k(x)$ il termine principale sia lo stesso,

sebbene dalla classe degli interi $m$ si passi a quella sua parte degli interi $n$ introducendo una restrizione che potrebbe essere giudicata notevole.

## Sulle successioni costituite di interi che sono a due a due primi fra loro

È evidente che si possono costruire, tante quante se ne vuole, di successioni di interi a due a due primi fra loro: per esempio una tale successione è $\{p_n\}$. Assegnata una successione $\{a_n\}$, sarà possibile estrarre da essa una successione parziale costituita da elementi a due a due primi fra loro? Alla questione risponde, in un certo senso, il seguente:

*Teorema* (Erdös–Fehér–Ruzsa)
Se la successione $\{a_n\}$ ha densità superiore 1 (cioè se $\limsup A(x, a_n)/x = \overline{D}(a_n) = 1$) allora

(a) È possibile estrarre da essa una successione parziale $\{b_k\}$ costituita di interi a due a due primi fra loro (cioè $(b_h, b_k) = 1$ per $h \neq k$).
(b) Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una successione $\{a_n\}$ crescente di densità $> 1 - \varepsilon$ tale che da essa non è possibile estrarre alcuna successione parziale i cui elementi abbiano a due a due lo stesso massimo comune divisore.

*Dim.* Dimostriamo la proporzione $(a)$. Sia $\overline{D}(a_n) = 1$. Fissato comunque un intero $n_1$ si tratta di costruire, partendo da $a_{n_1}$, la successione parziale $b_1, b_2, \ldots, b_s, \ldots$ ($b_s = a_{n_s}; n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$) con l'aggiunta via via di un elemento $b_s \in \{a_n\}$ alla sequenza dei precedenti, in guisa di rispettare la condizione $(b_h, b_k) = 1$. Procediamo per assurdo, supponendo che questo procedimento conduca ad una sequenza finita $b_1, b_2, \ldots, b_s$ che non sia più prolungabile. Sia $p_r$ il massimo divisore primo della sequenza di interi $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Gli interi assoluti $> 1$ che non sono divisibili per alcuno dei primi $p_1, p_2, \ldots, p_r$ costituiscono una successione $\{c_h\}$ che ammette densità $D(c_h)$ ed è

$$D(c_h) = \prod_{t=1}^{r}(1 - 1/p_t) > 0.$$

Per il fatto che la sequenza $b_1, \ldots, b_s$ non è prolungabile, non esiste alcun elemento $a_n > b_s$ che sia primo col prodotto $b_1 b_2 \ldots b_s$ e quindi $a_n$ non può essere un $c_k$: val quanto dire $\{a_n\}$ e $\{c_k\}$ non hanno elementi in comune. La successione che risulta dall'unione $\{a_n\} \cup \{c_k\}$ ha densità superiore $\overline{D} = \overline{D}(a_n) + D(c_k) = 1 + D(c_k) > 1$ assurdo.



Dimostriamo la proposizione $(b)$. A questo scopo fissato $\varepsilon > 0$, la successione $\mathbb{N}$ degli interi naturali verrà ripartita in due successioni (dipendenti da $\varepsilon$):

$$A = A(\varepsilon) = \{a_h\},\ B = B(\varepsilon) = \{b_k\}$$

fra loro disgiunte ($\mathbb{N} = A \cup B, \emptyset = A \cap B$) tali che $\overline{D}(b_k) < \varepsilon$ e $\{a_h\}$ non contiene alcuna sottosuccessione $\{a_{h_j}\}$ con la proprietà che il massimo comune divisore $(a_{h_j}, a_{h_i})$ risulti uguale a $d$ per ogni $j \neq i$.
Fissiamo un intero $u$ e una funzione $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, tali che $u$ sia abbastanza grande e la funzione $f(x)$ verifichi la condizione $f(x)/x \to +\infty$: di $u$ e $f$ disporremo convenientemente.
Sia $A = A(u, f) = \{a_h\}$ la successione parziale degli interi naturali $a > 1$ che verificano simultaneamente le due proprietà:

1°) Il minimo divisore primo di $a$ non supera $u$ (cioè, per $a > 1$, $\min\{p : p|a\} \leq u$).
2°) Se $p_k | a$ e $p_k$ non è il massimo dei divisori primi di $a$ allora, nell'intervallo $(p_k, f(p_k))$ si trova un ulteriore divisore primo di $a$, cioè

$$p_k | a, p_k < \max\{p : p|a\} \Rightarrow \left( \prod_{p_k < p_n \leq f(p_k)} p_n, a \right) > 1.$$

Denotiamo con $B = B(u, f)$ la successione complementare di $A$; diciamo $B_1$ e $B_2$ rispettivamente la successione degli interi a che non verifichino 1°) e che non verifichino 2°). $B = B_1 \cup B_2$ senza che siano $B_1$ e $B_2$ necessariamente disgiunte. Veniamo a calcolare la densità di $B_1$ e $B_2$. È noto (teorema di Mertens) che

$$\prod_{p_n \leq x} (1 - 1/p_n) = \{e^{-C} + O(1/\ln x)\}/\ln x.$$

Osserviamo che, anche se estendendo il prodotto a $p < x$ venisse a mancare l'ultimo fattore (con $p = x$) il secondo membro sarebbe ancora

$$\{e^{-C}+O(1/\ln x)\}/\ln x\cdot(1-1/x)=\{e^{-C}+O(1/\ln x)\}/\ln x$$

poiché $1/x=o(1/\ln x)$.
Qualora non avesse rilievo la determinazione dei termini principali delle rappresentazioni potremmo condurre il procedimento dimostrativo con la formula (meno raffinata ma conseguita con mezzi più elementari)

$$c_1/\ln x<\prod_{p_n\le x}(1-1/p_n)<c_2/\ln x,\ (0<c_1<c_2)$$

(con $c_1$ abbastanza piccolo e $c_2$ abbastanza grande).

Maggiorazione della densità superiore di $B_1$ e di $B_2$

Immaginiamo di avere scritte le espressioni, secondo Mertens, dei prodotti $\prod$ estesi rispettivamente a

$$p_n\le u, p_n\le p_k, p_n\le f(p_k), p_k<p_n\le f(p_k)$$

l'ultima ottenuta come quoziente delle due precedenti, risulta:

$$\prod_{p_k<p_n\le f(p_k)}(1-1/p_n)=\frac{\ln p_k}{\ln f(p_k)}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln p_k}\right)\right),\ (p_k<f(p_k)).$$

$B_1$ ammette la densità

$$\delta_1=\prod_{p_n\le u}(1-1/p_n)=\{e^{-C}+O(1/\ln u)\}/\ln u$$

mentre $B_2$, nella quale figurano tutti e soli gli interi $a$ per i quali esiste un intervallo $(p_k,f(p_k))$ che non contiene alcun divisore primo $p|a$, contiene i multipli $vp_k$ di $p_k$ dai quali dobbiamo togliere gli interi divisibili per almeno un primo $p$ dell'intervallo $(p_k,f(p_k))$. Pertanto $B_2$ contiene un insieme $B_2(k)$ di densità superiore

$$\delta_2(k)\le\frac{1}{p_k}\frac{\ln p_k}{\ln f(p_k)}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln p_k}\right)\right).$$



Facciamo percorrere a $p_k$ la successione dei numeri primi di questa categoria: veniamo a maggiorare la densità superiore $\delta_2$ di $B_2$ considerando l'intera successione dei numeri primi

$$\delta_2\le\sum_{k=1}^{\infty}\delta_2(k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln p_k}{p_k\ln f(p_k)}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln p_k}\right)\right)=S\cdot(1+O(1/u))\ (p_k\ge u)$$

Questa ultima eguaglianza è scritta nell'ipotesi che $f(x)/x$ sia crescente tanto rapidamente da rendere convergente la serie il cui termine generale è $\ln p_k/(p_k\ln f(p_k))$ (per esempio $\ln f(x)=(\ln x)^{1+\sigma}$ con $\sigma>0$).
La densità superiore di $B$ non supera la somma $\delta_1+\delta_2$ di quelle di $B_1$ e $B_2$ rispettivamente: pertanto

$$\delta\le\delta_1+\delta_2=\frac{e^{-C}}{\ln u}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln u}\right)\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln p_k}{p_k\ln f(p_k)}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln p_k}\right)\right).$$

A questo punto osserviamo:
Basta scegliere $u$ abbastanza grande per avere $\delta_1<\varepsilon/3$; basta scegliere $f(x)$ in guisa che $f(x)/x$ sia inizialmente abbastanza grande e poi crescente abbastanza rapidamente per ottenere $S<\varepsilon/3$; e poi $u$ abbastanza grande per avere il termine complementare $O(1/u)<1$.
Risulta $\delta\le\delta_1+\delta_2<3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$.
La densità superiore $\overline{D}(a_h)$ di $A=A(u,f)=\{a_h\}$ risulta $\ge 1-\delta>1-\varepsilon$.

La successione $A$ non possiede alcuna sottosuccessione $\{c_m\}$ con la proprietà $(c_i,c_j)=d$.

Procediamo per assurdo: ammettiamo che esista una sottosuccessione infinita $\{c_m\}$ di $\{a_h\}$ tale che $(c_i,c_j)=d$ per ogni $j\neq i$. Coordiniamo a $c_m$ la successione $\{s_m\}$ ponendo $c_m=ds_m$; allora risulta $(s_i,s_j)=1$ per ogni $i\neq j$ e quindi nella successione $\{s_m\}$ si trovano elementi con divisori primi grandi quanto si vuole poiché con $k$ numeri primi, come divisori, si potrebbero costruire al più $k$ interi $s_i$. Anche $\{c_m\}$ presenta elementi $c_m$ con divisori primi grandi quanto si vuole. Osserviamo che se i divisori primi distinti di $d$ sono $q_1,q_2,\ldots,q_t$, allora, poiché $(s_i,s_j)=1$ per $i\neq j$ avremo $(s_i,d)=d_i$ con $1\le d_i\le d\ d_i|d$ e gli interi $s_i$ non primi con $d$ sono al

massimo in numero di $t$. Denotiamo con $\overline{s}$ il massimo elemento di $\{s_m\}$ non primo con $d$, ponendo $\overline{s} = 1$ se non esistono $s_m$ tali che $(s_m, d) > 1$. Fissiamo un numero $\lambda \geq \overline{s} \cdot d$ e associamogli l'intervallo $[\lambda, f(\lambda))$. Per la validità della condizione 2° esistono infiniti $c_m$ con un divisore primo $p'$ con $\lambda \leq p' < f(\lambda)$ e i $p'$ sono a due a due diversi fra loro (essendo $(c_i, c_j) = d$ per $i \neq j$) e in $[\lambda, f(\lambda))$ sono contenuti infiniti interi primi: questo è assurdo e ne segue l'asserto.



Vengono qui presentati i diagrammi di alcune funzioni elementari intesi ad illustrare configurazioni e situazioni interessanti connesse con i concetti introdotti e da utilizzare per lo svolgimento degli esercizi proposti.

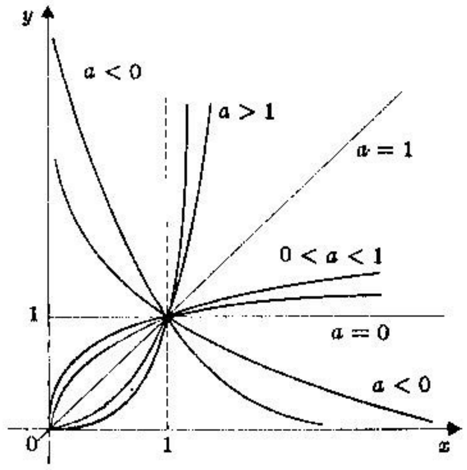



Fig. 1
(1). $y = x^a,\ a \in \mathbb{R}$

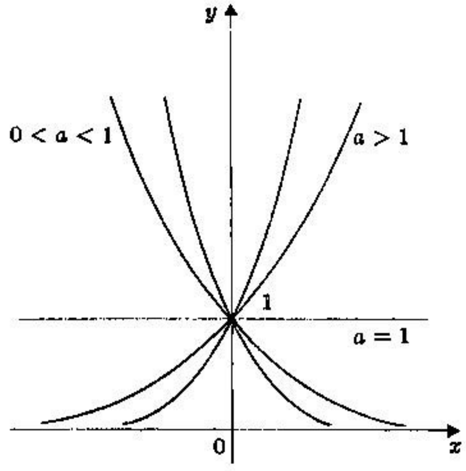



Fig. 2
(2). $y = a^x,\ a > 0$

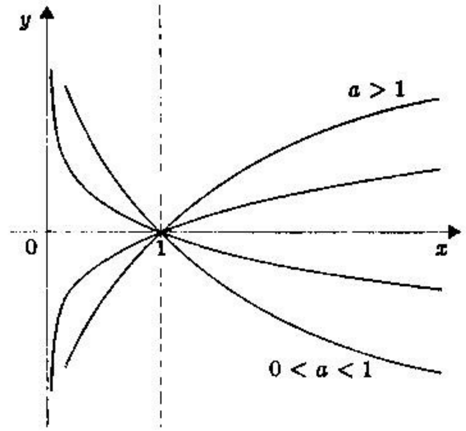



Fig. 3
(3). $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

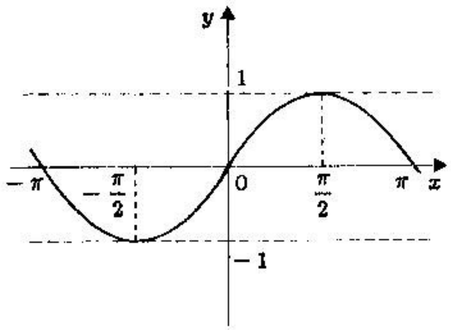



Fig. 4
(4). $y = \sin x$

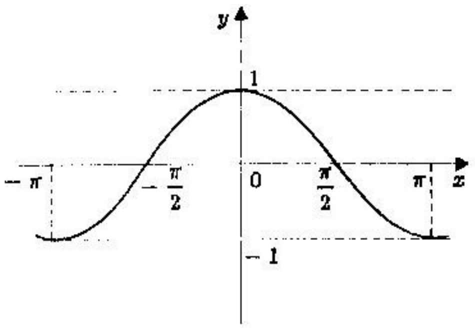



Fig. 5
(5). $y = \cos x$

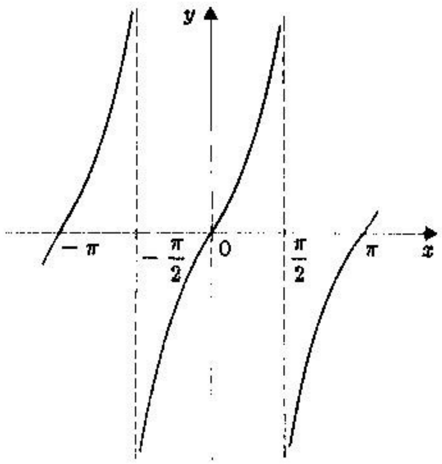



Fig. 6
(6). $y = \tan x$

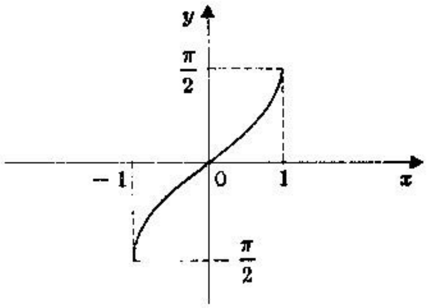



Fig. 7
(7). $y = \arcsin x$

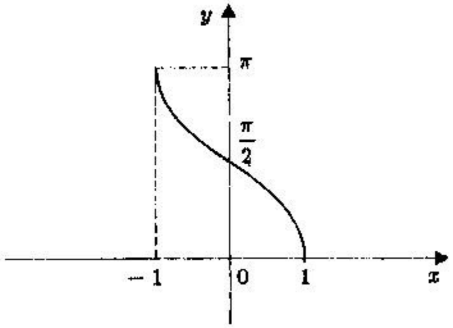



Fig. 8
(8). $y = \arccos x$



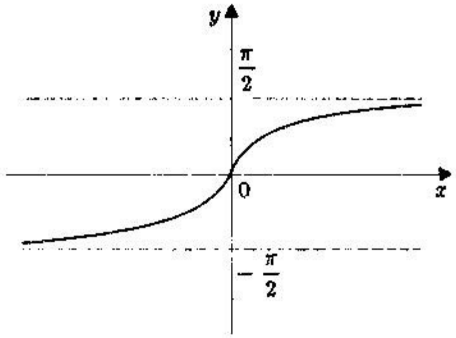



Fig. 9
(9). $y = \arctan x$

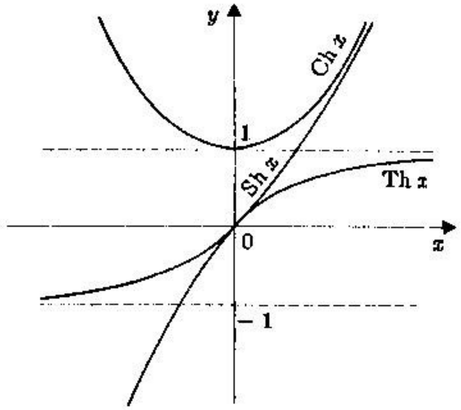
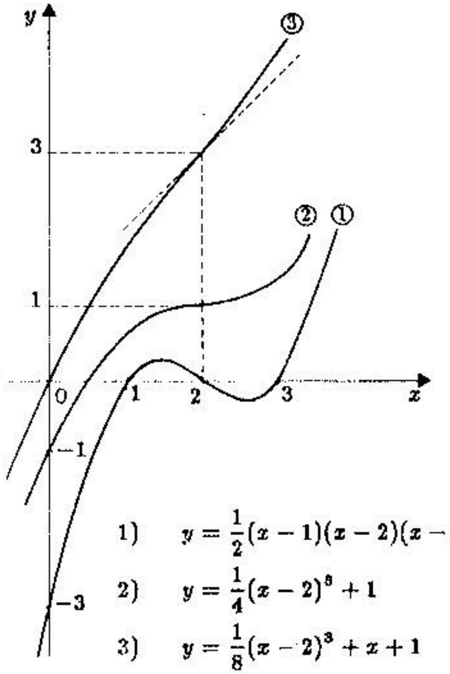



Fig. 10
(10). Funzioni iperboliche




1) $y = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)$

2) $y = \frac{1}{4}(x-2)^3 + 1$

3) $y = \frac{1}{8}(x-2)^3 + x + 1$

Fig. 11
(11). Cubiche del tipo
$ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a > 0$

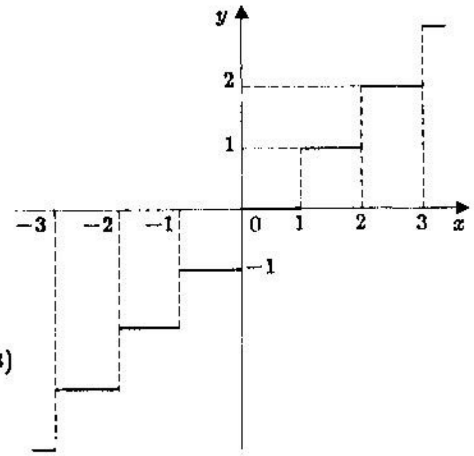



Fig. 12
(12). $y = [x]$

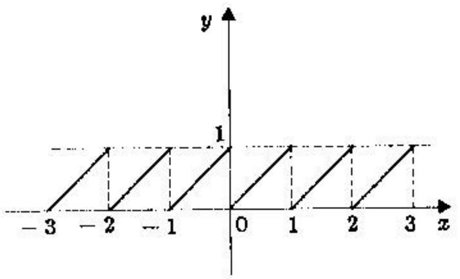



Fig. 13
(13) $y = \text{mant}\ x$

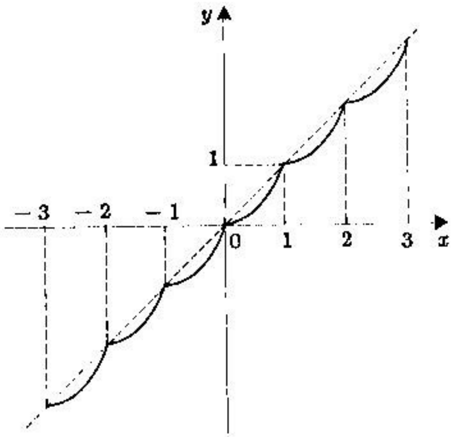



Fig. 14
(14). $y = |x| + (\text{mant}\ x)^2$
Il diagramma è composto da archi di parabola

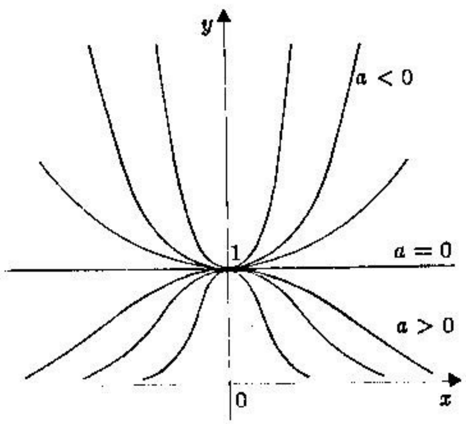



Fig. 15
(15). $y = e^{-ax^2}$, $a \in \mathbb{R}$

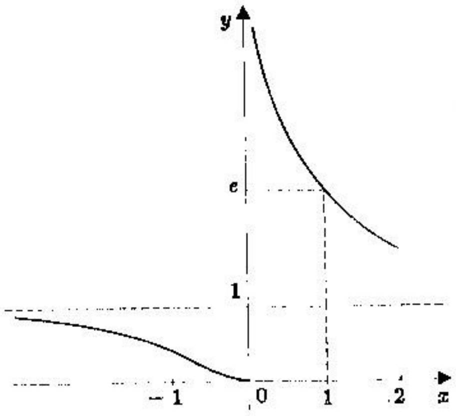



Fig. 16
(16). $y = e^{1/x}$



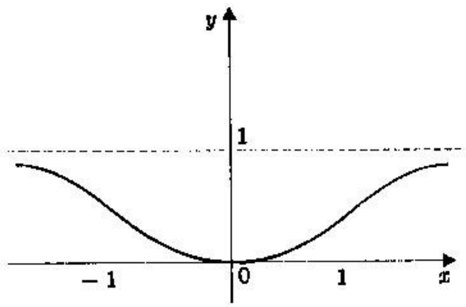



Fig. 17

(17). $$y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$$
Tale funzione ammette derivata di qualsiasi ordine
(anche nel punto $x = 0$)

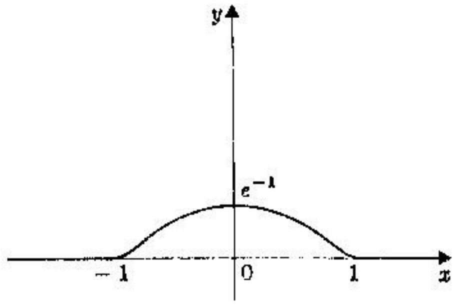



Fig. 18

(18). $$y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{per} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{per} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$
Tale funzione ammette derivata di qualsiasi ordine
(anche nei punti $x = \pm 1$)

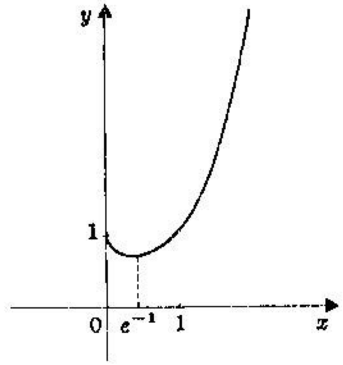



Fig. 19
(19). $y = x^x$

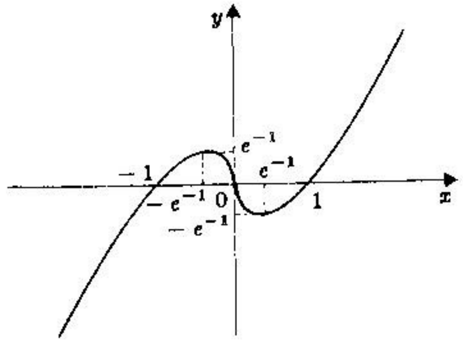



Fig. 20
(20). $y = x \ln |x|$

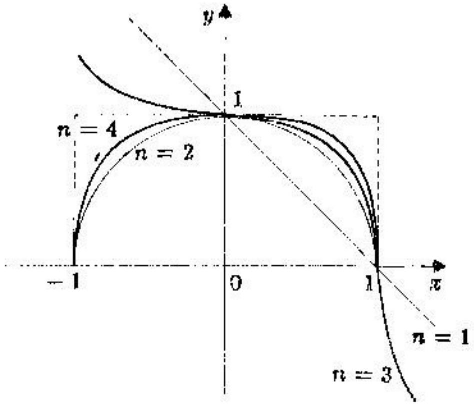



Fig. 21

(21). $y = \sqrt[n]{1 - x^n}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

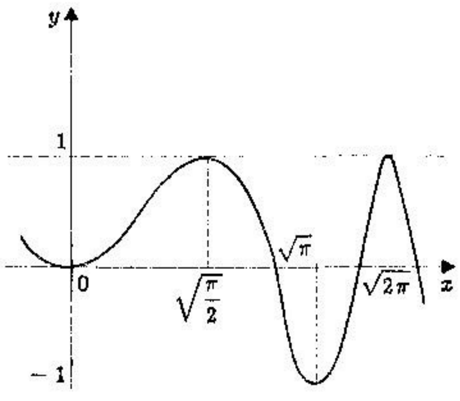



Fig. 22

(22). $y = \sin(x^2)$

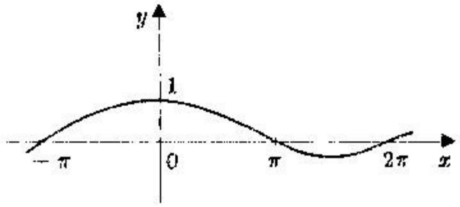



Fig. 23

(23). $y = \dfrac{\sin x}{x}$

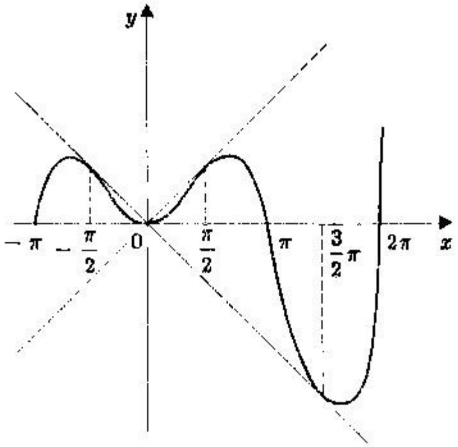



Fig. 24

(24). $y = x \sin x$



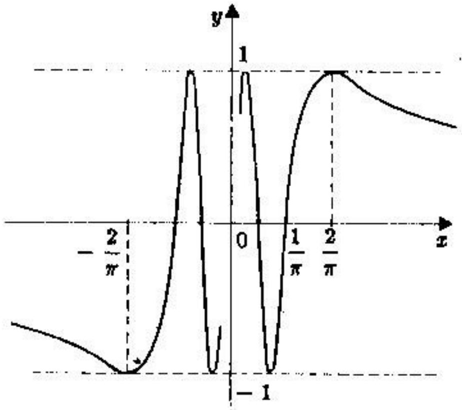



Fig. 25

(25). $y = \sin \dfrac{1}{x}$
La classe limite per $x \to 0$
è l'intervallo $[-1, 1]$

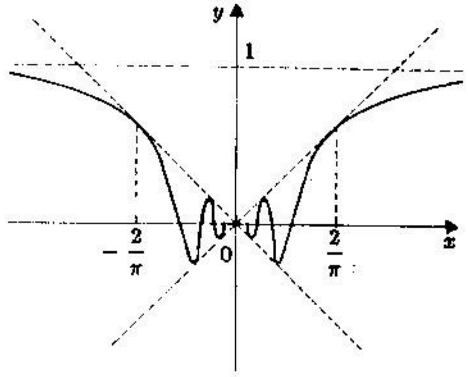



Fig. 26

(26). $y = x \sin \dfrac{1}{x}$

# Indice analitico